תאריך הבחינה:__01.02.12_____
שם המרצה: ד"ר א. לרמן
שם הקורס: __חדו"א מערכות מידע 1___
מס' הקורס: __201-1-9751________
מיועד לתלמידי: __הנדסת מערכות מידע_____
שנה: _תשע"ב__ סמסטר: _א'__ מועד _א'__
משך הבחינה: ______3 שעות___________
חומר עזר: _2 דפי נוסחאות דו-צדדים של סטודנט, מחשבון___

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' נבחן: ___________________________

יש להשיב על 5 בדיוק מתוך 6 השאלות הבאות. לכל שאלה משקל זהה (20 נקודות).
נמקו את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדויק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

<u>שאלה 1.</u>
א) (15 נק') היעזר בקריטריון קושי בהוכחה של הטענה הבאה:
הסדרה $a_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 3} + \frac{\cos 2}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{\cos n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$ מתכנסת,
ב) (5 נק') הוכח או הפרך את הטענה הבאה:
אם הסדרה $(a_n + b_n)$ מתכנסת, אז גם הסדרה $(a_n - b_n)$ מתכנסת.

<u>שאלה 2.</u>
חקור את הפונקציה הבאה: $\mathbf{y = x + \arctan x}$
(גבולות חד-צדדיים בנקודות האי-רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של גרף)

<u>שאלה 3.</u>
(4 נק') הוכח את הטענה הבאה: אם הפונקציה $\mathbf{f(x)}$ מוגדרת ורציפה בתחום <u>סופי פתוח</u> $\mathbf{(a, b)}$ וקיימים גבולות <u>סופיים</u> $\lim_{x\to a+} f(x) = A$ ו - $\lim_{x\to b-} f(x) = B$, אז הפונקציה $\mathbf{f(x)}$ חסומה בתחום $\mathbf{(a, b)}$.
הוכח על סמך זה את הטענות הבאות:
א) (8 נק') הפונקציה $f(x) = \frac{\log_2(3x^2 - 9x + 7)}{\log_3(5x^2 - 17x + 15)}$ חסומה בתחום $\mathbf{(2, 5)}$;
ב) (8 נק') הפונקציה $f(x) = \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2}$ חסומה בתחום $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

<u>שאלה 4.</u>
א) (10 נק') חשב על סמך ההגדרה את הנגזרת של הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.
ב) (10 נק') הוכח כי הפונקציה $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q \\ -x^2, & x \notin Q \end{cases}$ גזירה נקודה $\mathbf{x = 0}$ אך אינה גזירה בשום נקודה אחרת.

<u>שאלה 5.</u> חשב את הגבולות הבאים:

א) (10 נק') $\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^{2x^2-x} \ln t dt}{\int_1^x (4t-1)\ln t dt}$,

ב) (10 נק') $\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$.

<u>שאלה 6.</u>
א) (10 נק') שרטטו אח התחום אינסופי המוגבל על ידי הקווים:

(i) הגרף של $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

(ii) האסימפטוטה ב ∞ ל- $f(x)$

(iii) הנמצא מימין לישר $x=1$

האם השטח הזה הוא סופי?

ב) (10) מסובבים סביב ציר ה- x את התחום של **(א)**.
בדקו שהנפח של גוף סיבוב הזה הוא סופי וחשבו אותו.

בהצלחה!

פתרון - מועד א – 01.02.12

שאלה 1

א) היעזר בקריטריון קושי כדי להוכיח כי:

הסדרה $a_n=\frac{\cos 1}{1\cdot 3}+\frac{\cos 2}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{\cos n}{(2n-1)(2n+1)}$ מתכנסת.

לכל $\varepsilon>0$ ולכל $p\in N$ נקבל:

$$\left|a_{n+p}-a_n\right|=\left|\frac{\cos(n+1)}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{\cos(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}+\cdots+\frac{\cos(n+p)}{(2n+2p-1)(2n+2p+1)}\right|\le$$

אי-שוויון המשולש וגם - $\left[\left|\cos\alpha\right|\le 1\right]$

$$\le\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}+\cdots+\frac{1}{(2n+2p-1)(2n+2p+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}+\cdots+\frac{1}{2n+2p-1}-\frac{1}{2n+2p+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2p+1}\right)<\frac{1}{2(2n+1)}<\varepsilon$$

וזה לכל $n>\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}$. נבחר $n_0=\left[\frac{1}{4\varepsilon}-\frac{1}{2}\right]+1$.

זה מוכיח כי $\left(a_n\right)$ מתכנסת לפי קריטריון קושי.

ב)

הטענה לא נכונה. לדוגמא, שוב ניקח $a_n=(-1)^n$ ו- $b_n=(-1)^{n+1}$ אזי הסדרה $a_n+b_n=0$ מתכנסת אבל $a_n-b_n=2\cdot\left(-1\right)^n$ מתבדרת.

שאלה 2.

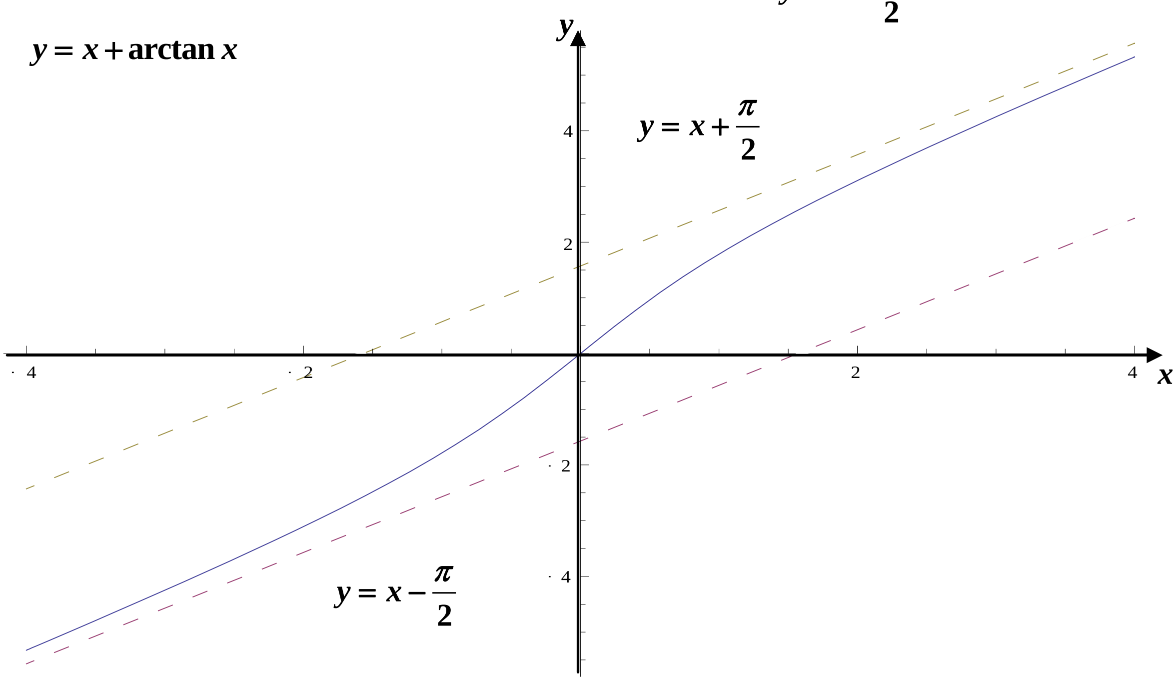
$y = x+\arctan x$. הפונקציה אי – זוגית . חיתוך עם הצירים: $(0,0)$. $y' = 1+\frac{1}{1+x^2} > 0$,

לכן הפונקציה עולה ממש בכל התחום וכן אין נקודות קיצון.

אסימפטוטות: $k = \lim_{x\to\pm\infty} 1+\frac{\arctan x}{x} = 1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\pm\pi}{2x} = 1$. כמו כן:

$b_1 = \lim_{x\to\infty}\left(x+\arctan x - x\right) = \frac{\pi}{2}$ ו- $b_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\arctan x - x\right) = -\frac{\pi}{2}$. לכן $y = x+\frac{\pi}{2}$

אסימפטוטה ימנית ו- $y = x-\frac{\pi}{2}$ אסימפטוטה שמאלית.



שאלה 3

נגדיר פונקציה חדשה: $F(x)=\begin{cases} f(x), a<x<b \\ A, x=a \\ B, x=b \end{cases}$

הפונקציה החדשה הנ"ל רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ולכן, לפי משפט ויירשטרס חסומה בו $\Leftarrow$
$\Leftarrow$ המקורית חסומה ב- (a,b).

א) בודקים את הרציפות של הפונקציה בקטע סגור $[2,5]$. נקודת אי - הגדרה של הפונקציה - $x=2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{\ln\left(3x^2-9x+7\right)}{\ln 2}}{\frac{\ln\left(5x^2-17x+15\right)}{\ln 3}}=\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{\ln\left[1+\left(3x^2-9x+6\right)\right]}{\ln\left[1+\left(5x^2-17x+14\right)\right]}=$$

$$=\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-9x+6}{5x^2-17x+14}=\frac{\ln 3}{\ln 2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{3(x-1)(x-2)}{(5x-7)(x-2)}=\frac{\ln 3}{\ln 2}=A<\infty$$

בנוסף, הפונקציה רציפה ב- $(2,5)$ לכן, על סמך הטענה הפונקציה חסומה בקטע $\mathbf{(2,5)}$.

ב) נקודות אי הגדרה של הפונקציה - $x=\pm\frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x)=\left\{\begin{matrix} t=x+\frac{\pi}{2} \\ x=t-\frac{\pi}{2} \\ x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+\Rightarrow t\to 0^+ \end{matrix}\right\}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}{4\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2-\pi^2}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{4\left(t^2-\pi t+\frac{\pi^2}{4}\right)-\pi^2}=$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{4t^2-4\pi t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t(4t-4\pi)}=\boxed{-\frac{1}{4\pi}}<\infty$$

באותה הדרך נחשב את הגבול עבור $x\to\frac{\pi}{2}$ $\Leftarrow$ הגבולות בקצוות סופיים, הפונקציה רציפה בקטע הפתוח $\Leftarrow$ מתקיים משפט ויירשטרס. הפונקציה חסומה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

שאלה 4

א) $y=\sqrt{\ln x}$

$$y'=\sqrt{\ln x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[\sqrt{\ln\left(x+\Delta x\right)}-\sqrt{\ln x}\right]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\ }-\sqrt{\ }\right)\left(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }\right)}{\Delta x\left(\sqrt{\ }+\sqrt{\ }\right)}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(x+\Delta x\right)-\ln x}{\left(\sqrt{\ln\left(x+\Delta x\right)}+\sqrt{\ln x}\right)\cdot\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{\ln\left(x+\Delta x\right)}+\sqrt{\ln x}\right)}=$$

$$\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}=1\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{\ln\left(x+\Delta x\right)}+\sqrt{\ln x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\cancel{\Delta x}}{x}}{\cancel{\Delta x}\left(\sqrt{\ln\left(x+\Delta x\right)}+\sqrt{\ln x}\right)}=\boxed{\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}}$$

בדיקה: $y=\sqrt{\ln x}=\left(\ln x\right)^{\frac{1}{2}}\longrightarrow y'=\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}=\boxed{\frac{1}{2x}\cdot\frac{1}{\sqrt{\ln x}}}$

ב)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-0}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}\frac{x^{\cancel{2}}-0}{\cancel{x}}=0\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\notin\mathbb{Q}}}\frac{-x^{\cancel{2}}-0}{\cancel{x}}=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$ פונקציה כן רציפה וגזירה בנק' $x=0$

כעת נחשב גבול עבור $\left(h\notin Q, a\in Q\Rightarrow a+h\notin Q\right)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{-\left(a+h\right)^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2a^2\overbrace{-2ah-h^2}^{\to 0}}{h}=-\infty$$

וכעת עבור $\left(a\notin Q\Rightarrow a+h\in Q\right)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+h\right)-f\left(a\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(a+h\right)^2+a^2}{h}=\infty$$

כלומר הפונקציה אינה גזירה בנק' $x\neq 0$.

<u>שאלה 5.</u>

א)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^{2x^2-x}\ln t\,dt}{\int_1^x (4t-1)\ln t\,dt}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(4x-1)\ln\left(2x^2-x\right)}{(4x-1)\ln x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(2x^2-x\right)}{\ln x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{4x-1}{\left(2x^2-x\right)}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{(4x-1)x}{\left(2x^2-x\right)}=3$$

ב) נחשב $\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$

$$\Rightarrow\left\{\frac{1}{x}=t\right\}=\lim_{t\to 0+}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\cdot\ln(1+t)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left[\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\right]=\lim_{t\to 0+}\left[\frac{t-\left(t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)}{t^2}\right]=\frac{1}{2}\,.$$

<u>שאלה 6.</u>

א) שרטטו את התחום אינסופי המוגבל על ידי הקווים:

(i) הגרף של $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

(ii) האסימפטוטה ב ∞ ל- $f(x)$

(iii) הנמצא מימין לישר $x=1$

האם השטח הזה הוא סופי?

ב) מסובבים סביב ציר ה-x את התחום של (**א**).

בדקו שהנפח של גוף סיבוב הזה הוא סופי וחשבו אותו.

א) משוואת האסימפטוטה ב- $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$

↲ **לכן:** $y=0$ הוא האסימפטוטה אופקית ב- $+\infty$.

הערה חשובה: בקטע $[1,+\infty)$ מתקיים $\frac{\ln(x)}{x}\ge 0$ כלומר הגרף נמצאה מעל האסימפטוטה.

☜לכן שטח התחום המבוקש שווה: $S=\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X f(t)dt=\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X\frac{\ln(t)}{t}dt$

$$\int_1^X\frac{1}{t}\ln(t)dt=\left[\frac{\ln^2(t)}{2}\right]_1^X=\frac{\ln^2(X)}{2}$$

לכן: $S=\lim\limits_{X\to+\infty}\int_1^X f(t)dt=+\infty$ השטח הזה הוא אינסופי!

ב) נפח של גוף סיבוב. $V=\lim\limits_{X\to+\infty}\pi\int_1^X f^2(t)dt=\lim\limits_{X\to+\infty}\pi\int_1^X\frac{\ln^2(t)}{t^2}dt$

$$\int_1^X\frac{\ln^2(t)}{t^2}dt\underset{\substack{u=\ln^2(t)\quad u'=2\frac{\ln(t)}{t}\\ v'=\frac{1}{t^2}\quad v=-\frac{1}{t}}}{=}\left[-\frac{\ln^2(t)}{t}\right]_1^X+2\underbrace{\int_1^X\frac{\ln(t)}{t^2}dt}_{\substack{u=\ln(t)\quad u'=\frac{1}{t}\\ v'=\frac{1}{t^2}\quad v=-\frac{1}{t}}}$$

$$=-\frac{\ln^2(X)}{X}+2\left(\left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^X+\int_1^X\frac{1}{t^2}dt\right)$$

$$=-\frac{\ln^2(X)}{X}+2\left(-\frac{\ln(X)}{X}-\frac{1}{X}+1\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{\ln^2(X)}{X}+2\left(-\frac{\ln(X)}{X}-\frac{1}{X}+1\right)\right)-(0)=2$$

לכן:

$$V=\lim_{X\to+\infty}\pi\int_1^X f^2(t)dt=\lim_{X\to+\infty}\pi\int_1^X\frac{\ln^2(t)}{t^2}dt=\pi\cdot\left(\lim_{X\to+\infty}\left(-\frac{\ln^2(X)}{X}+2\left(-\frac{\ln(X)}{X}-\frac{1}{X}+1\right)\right)-(0)\right)=2\pi$$