אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: __24.01.18__
שם המרצה: ד"ר א.לרמן, ד"ר נ.קרפיבניק
שם הקורס: חדו"א למערכות מידע 1
מספר הקורס: _201-1-9751____
שנה: תשע"ח סמסטר: א' מועד א'
משך הבחינה: __3 שעות___
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים)
מחשבון לא גרפי.

הוראות לנבחן:

- כתוב באופן ברור, התחל כל שאלה בעמוד חדש, נמקו את שלבי החישוב. רצוי לבדוק.
- ענה על 4 השאלות.

בהצלחה!

שאלה 1. (25 נק')

א. (15 נק')

(1) (8 נק') הוכיחו תוך שימוש בהגדרת הגבול : $\lim_{n\to\infty}(-1)^n(0.999)^n=0$.

(2) (7 נק') בדקו אם הסדרה $a_n=\dfrac{(2n-1)!}{(n^2+1)^n\cdot e^n}$ היא סדרה מתכנסת.

אם כן , חשבו את גבול הסדרה.

ב. (10 נק') חשבו את השטח החסום על ידי הקווים: $x=\pi$, $y=2x$,

$y=|\sin 2x|$. ציירו את הסקיצה של התחום.

שאלה 2. (25 נק')

א. (15 נק') הוכיחו שפונקציה $f(x)=x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ עולה בתחום $[1,\infty)$.

ב. (10 נק') חשבו את הגבול הבא (בעזרת פולינום מקלורן):

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

<u>שאלה 3.</u> (25 נק')

א. (10 נק') נתונה הפונקציה : $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(1) האם $f(x)$ רציפה לכל x ממשי?

(2) האם $f(x)$ גזירה לכל x ממשי? אם כן , האם $f'(x)$ רציפה לכל x ממשי?

בשני הסעיפים , אם התשובה חיובית או שלילית , הראו את הבדיקה המלאה.

ב. (15 נק') חשבו את האינטגרלים הבאים :

(1) (8 נק') $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$, (2) (7 נק') $\int\frac{xdx}{x^3-3x+2}$.

<u>שאלה 4.</u> (25 נק')

א. (10 נק') תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה פעמיים בכל נקודה פנימית של הקטע, כך שמתקיים $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$, כאשר $a\le x_1<x_2<x_3\le b$.

הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f''(c)=0$.

ב. (15 נק') מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה : $g(x)=\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$.

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

פתרון

שאלה 1

א. (1) צ"ל: $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cdot(0.999)^n=0$

כלומר $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}: |(-1)^n\cdot(0.999)^n|<\varepsilon\ \ \forall n\geq N$

יהי $\varepsilon>0$

$$|0.999|^n<\varepsilon$$

$\ln x$ פונק' עולה $\Leftarrow$ $\quad n\cdot\ln(0.999)<\ln\varepsilon$

$\ln 0.999<0$ $\Leftarrow$ $\quad n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln(0.999)}$

אם $0<\varepsilon<1$ אז $\quad N_1=\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln(0.999)}\right]+1\in\mathbb{N}$

אם $\varepsilon\geq 1$ אז $\quad N_2=1$

הוכחנו כי לכל $\varepsilon>0$ קיים $N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbb{N}$ כך ש:

$|0.999|^n<\varepsilon$ לכל $n\geq N$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(n^2+1)^n\cdot e^n}$$

נסמן $a_n=\frac{(2n-1)!}{(n^2+1)^n\cdot e^n}>0$. נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{((n+1)^2+1)^{n+1}\cdot e^{n+1}}\cdot\frac{(n^2+1)^n\cdot e^n}{(2n-1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\cdot(2n+1)}{e}\cdot\left(\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}\right)^n\cdot\frac{1}{(n+1)^2+1}=$$

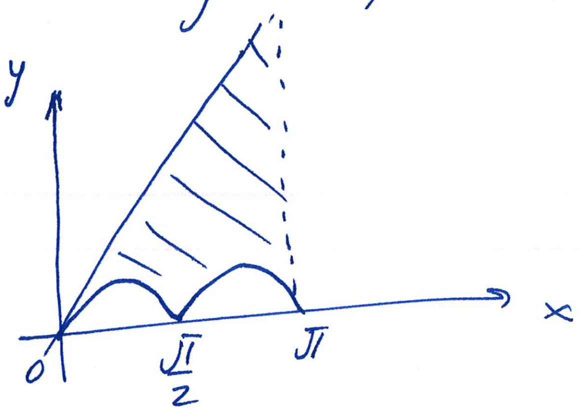
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+2n}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{1}{e} \cdot \left[\left(1+\frac{-2n-1}{(n+1)^2+1}\right)^{\frac{(n+1)^2+1}{-2n-1}}\right]^{\frac{-2n-1}{(n+1)^2+1}\cdot n} =$$

$$= 4 \cdot e^{-1} \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^3} < 1$$

$\Leftarrow$ הסדרה $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ג.

$$y = 2x, \quad x = \pi, \quad y = |\sin 2x|$$



$$|\sin 2x| = \begin{cases} \sin 2x, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\sin 2x, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

$$S = \int_0^{\pi} (2x - |\sin 2x|)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - \sin 2x)\,dx +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x + \sin 2x)\,dx = \left(x^2 + \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(x^2 - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos 0 + \pi^2 - \frac{1}{2}\cos 2\pi -$$

$$- \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{2}\cos\pi = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \pi^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \pi^2 - 2$$

שאלה 2

א.

$$f(x)=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x^2}{1+x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$$

צ"ל: $f'(x)>0$ לכל $x\geq 1$.

נסמן $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$

$$g'(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$g'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{x\cdot(1+x)}=\frac{1}{1+x}\cdot\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$g'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\left(\frac{x-1-x}{x}\right)=\frac{1}{(1+x)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)<0$$

לכל $x\geq 1$

$\Leftarrow$ $g(x)$ מונוטונית יורדת.

$$g(1)=\ln 2-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

$g(x)$ חיובית לכל $x\geq 1$ כפונק' אסימפטוטית

ומונוטונית לכל $x\geq 1$

לכן $g(x)=f'(x)>0$ לכל $x\geq 1$ $\Leftarrow$ $f(x)$ מונוטונית עולה בתחום $x\geq 1$

ב. (1)

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\left[\begin{matrix}t=\frac{1}{x}\\ \underset{x\to\infty}{t\to 0}\end{matrix}\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\cdot\ln(1+t)\right)\underset{\uparrow}{=}\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\cdot\left(t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right)\right)$$

פיתוח מקלורן

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}-\underbrace{\frac{o(t^2)}{t^2}}_{\xrightarrow[t\to 0]{}0}\right)=\frac{1}{2}$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\cos\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}\right]^{x\cdot\sin\frac{1}{x}\cdot\cos\frac{1}{x}\,\frac{x(2)}{x(2)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}}\right]^{\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{2}{x}}=e$$

מיוחד גבול

$$\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{2}{x}=\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$$

<u>שאלה 3.</u>

א.

$$f(x)=\begin{cases}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

(1)

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{x^2}_{\text{אפיסה}}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{חסומה}}=0=f(0)$$

$\Leftarrow$ $f(x)$ רציפה בנק' $x=0$

(2)

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x^2\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}-0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\Delta x}_{\text{אפיסה}}\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{\Delta x}}_{\text{חסומה}}=0$$

$\Leftarrow$ $f(x)$ גזירה בנק' $x=0$

עבור $x\neq 0$ $x^2 \sin\frac{1}{x}$ גזירה:

$$\left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)' = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

נבחר $x_n = \frac{1}{2\pi n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

$$x_n \neq 0, \quad f(x_n) = 2x_n \cdot \sin\frac{1}{x_n} - \cos\frac{1}{x_n}$$

$$x_n \neq 0, \quad f(x_n) = 2 \cdot \frac{1}{2\pi n} \cdot \sin 2\pi n - \cos 2\pi n =$$

$$= \frac{1}{\pi n} \cdot 0 - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \neq 0$$

$\Leftarrow$

$$f'(x) \underset{x\to 0}{\not\to} 0$$

$\Leftarrow$ $f'(x)$ אינה רציפה בנק' $x=0$.

ב.

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx = \left[\begin{matrix} t=\sqrt[3]{x} & dx = 3t^2dt \\ t^3 = x & \end{matrix}\right] = \int 3t^2 \cdot e^t dt =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = 3t^2 & du = 6t\,dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix}\right] = 3t^2e^t - \int 6te^t dt =$$

$$= \left[\begin{matrix} u = t & du = dt \\ dv = e^t dt & v = e^t \end{matrix}\right] = 3t^2e^t - 6\cdot\left(t\cdot e^t - \int e^t dt\right) =$$

$$= 3t^2e^t - 6\cdot(e^t \cdot t - e^t) + C = 3\sqrt[3]{x^2}\cdot e^{\sqrt[3]{x}} - 6\sqrt[3]{x}\cdot e^{\sqrt[3]{x}} +$$

$$+ 6e^{\sqrt[3]{x}} + C$$

(2)

$$I=\int\frac{x\,dx}{x^3-3x+2}$$

$x=1: \quad 1-3+2=-2+2=0$

$<=$ $x=1$ אפס הפולינום x^3-3x+2

$$\begin{array}{l} \quad x^2+x-2 \\ \hline x^3-3x+2 \;\big]\; x-1 \\ -\underline{x^3-x^2} \\ \quad -x^2-3x+2 \\ \quad \underline{x^2-x} \\ \quad\quad - -2x+2 \\ \quad\quad \underline{-2x+2} \\ \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=$

$=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x-1)$

$x^2+x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}=-2,\ 1$$

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$$

$$A\cdot(x-1)\cdot(x+2)+B\cdot(x+2)+C\cdot(x-1)^2=x$$

$x=1: \quad 3B=1 \Rightarrow \boxed{B=\frac{1}{3}}$

$x=-2: \quad 9C=-2 \Rightarrow \boxed{C=-\frac{2}{9}}$

$x^2: \quad A+C=0 \Rightarrow A=-C \Rightarrow \boxed{A=\frac{2}{9}}$

$$I=\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{2}{9}\ln|x-1|+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}-\frac{2}{9}\ln|x+2|+C=$$

$$= \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{2}{9}\ln|x+2| + C$$

שאלה 4

א. $f(x)$ רציפה ב $[a,b]$ וגזירה פעמיים ב (a,b).

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$$

$$a \le x_1 < x_2 < x_3 \le b$$

נתבונן בקטע $[x_1,x_2]$: $f(x)$ רציפה בקטע וגזירה בכל נק' פנימית, $f(x_1)=f(x_2)$ $\Leftarrow$ ממשפט רול קיימת נק' $x_1 < c_1 < x_2$ כך ש $f'(c_1)=0$

נתבונן בקטע $[x_2,x_3]$: $f(x)$ רציפה בקטע וגזירה בכל נקודה פנימית, $f(x_2)=f(x_3)$ $\Leftarrow$ ממשפט רול קיימת $x_2 < c_2 < x_3$ כך ש $f'(c_2)=0$

נתבונן בקטע $[c_1,c_2]\subset[a,b]$ ו $f'(x)$ רציפה ב $[c_1,c_2]$ כי $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע (a,b)! $f'(x)$ גזירה בקטע (c_1,c_2) כי $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע (a,b) ו $f'(c_1)=f'(c_2)$! $\Leftarrow$ רול קיימת נק' $c_1 < c_3 < c_2$ כך ש $f''(c_3)=0$.

ב.
$$g(x) = \frac{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$$

$$D_g: \begin{cases} x^2-1 \ge 0 \\ 2x^2-1 \ne 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

אין אסימפטוטות אנכיות, $\pm\frac{1}{2} \notin D_g$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot\sqrt{x^2-1}}{x\cdot(2x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cdot|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^3\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} \underset{x>0}{=} \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\sqrt{x^2-1}-2x^3+x}{2\cdot(2x^2-1)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2\cdot|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2x^3+x}{2\cdot(2x^2-1)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to+\infty\\ x>0}} \frac{\left(2x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 2x + \frac{1}{x}\right)\cdot\left(x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\right)}{2\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x^2-1-x^2)+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1}{2x\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1}{2x\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \left\{\frac{0}{\infty}\right\} = \left\{0\cdot\frac{1}{\infty}\right\} = 0$$

$y = \frac{x}{2}$ אסימפטוטה משופעת ב $+\infty$

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{x\cdot(2x^2-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\cdot x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x^3\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)} \underset{x<0}{=} -\frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1} + \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2|x|\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x^3-x}{2\cdot(2x^2-1)} =$$

$$\underset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(-2x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\right)}{2\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\left(x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2\cdot\left(-x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)+x^2\right)-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-1}{2\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(x\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2x\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x\cdot\left(2-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1} \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 0\cdot 0 = 0$$

$y=-\frac{x}{2}$ אסימפטוטה משופעת ב $-\infty$.