**26.01.2011 פתרון מועד א' – תשע"א סמסטר א'**

**שאלה 1.**

נציין את 3 התכונות הבאות :

1) מהגדרה נובע כי $a_n \ge 0$ לכל $\boldsymbol{n=1,2,...}$, כלומר, הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה ע"י $\mathbf{0}$.

2) $a_{n+1} \le a_n$ לכל $\boldsymbol{n=1,2,...}$, כלומר, הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת (לא עולה).

מכיוון שעבור $a_n \ge 0$ מתקיים ש- $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2}{a_n^2+1} \le a_n \iff (a_n-1)^2 \ge 0$.

3) אם $|b| \ge 1$ אז $\dfrac{2b^2}{b^2+1} \ge 1$

ולכן באינדוקציה מקבלים כי $\boldsymbol{a_n \ge 1}$ עבור כל $\boldsymbol{n=1,2,...}$, כאשר $|b| \ge 1$.

מתכונות **1,2** נובע כי הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת וחסומה מלמטה, לכן לפי משפט היא מתכנסת.

נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C$; גם $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = C$; ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2a_n^2}{a_n^2+1} = \dfrac{2C^2}{C^2+1} = C$.

למשוואה זו ישנם שני שורשים $\boldsymbol{C=0}$ ו- $\boldsymbol{C=1}$.

אם $|b|<1$ אז $\boldsymbol{a_n < 1}$ לכל $\boldsymbol{n=1,2,...}$, ולכן משום

שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יורדת גם $\boldsymbol{C<1}$, כלומר, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

אם $|b| \ge 1$ אז לפי תכונת **3** מתקיים ש- $\boldsymbol{a_n \ge 1}$ לכל $n=1,2,...$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

**שאלה 2.**

$\boldsymbol{y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}}$. תחום הגדרה: $\boldsymbol{x \ne 0}$. $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)e^{\frac{1}{x}} = \infty}$ וכן $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)e^{\frac{1}{x}} = 0}$ לכן

$\boldsymbol{x=0}$ אסימפטוטה אנכית מימין.

$\boldsymbol{y' = e^{\frac{1}{x}} + (x+2)e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\dfrac{x^2-x-2}{x^2} = e^{\frac{1}{x}}\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}}$. לכן, נקודות חשודות לקיצון

הן: $\boldsymbol{x=2,\ x=-1}$. $\boldsymbol{y'' = e^{\frac{1}{x}}\dfrac{5x+2}{x^4}}$, לכן $\boldsymbol{y''(2)>0}$ ו- $\boldsymbol{y''(-1)<0}$,

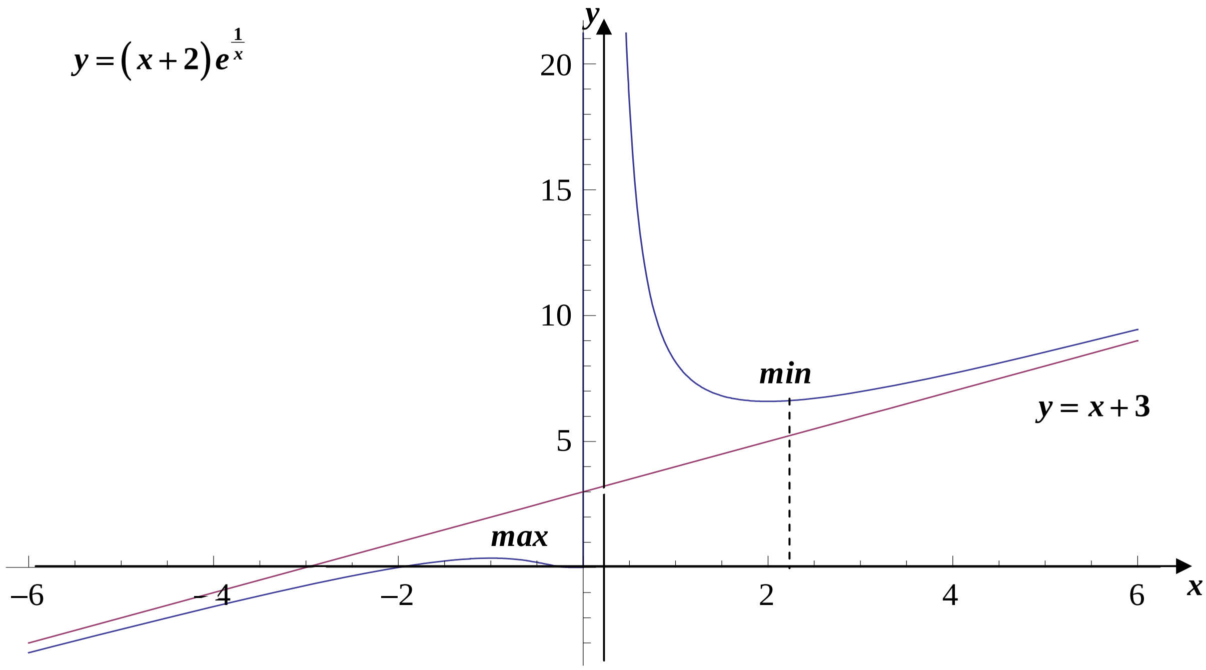
מכאן $\boldsymbol{\left(2,4\sqrt{e}\right)}$ נקודת מינימום ו- $\boldsymbol{\left(-1,\dfrac{1}{e}\right)}$ נקודת מקסימום.

אסימפטוטות: $\boldsymbol{k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x+2)}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1}$.

$$\boldsymbol{k = \lim_{x\to\pm\infty}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}} - x\right) = \lim_{t\to 0}\left(\left(\frac{1}{t}+2\right)e^t - \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)e^t - 1}{t} =}$$

$$\boldsymbol{= \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{t\to 0}\left[(1+2t)e^t + 2e^t\right] = 3}$$

לכן $\boldsymbol{y=x+3}$ אסימפטוטה משופעת דו-צדדית.




**<u>שאלה 3.</u>**

א)

עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}, & x\neq 0\\ \frac{1}{2}, & x=0\end{cases}$ נבדוק גזירות בנקודה $x=0$.

נציין ש $f(x)$ רציפה בנק' $x=0$:

$$\lim_{x\to0} f(x)=<\infty-\infty>\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\Rightarrow< LOP >=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\Rightarrow< LOP >=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

ז"א $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $f(x)$ רציפה בנק' $x=0$.

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{2}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2e^x-2-2x-xe^x+x}{2x^2\left(e^x-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{0}\right)\frac{2e^x-2-x-xe^x}{2x^2\left(e^x-1\right)}\Rightarrow< LOP >=\lim_{x\to0}\frac{2e^x-1-e^x-xe^x}{4x\left(e^x-1\right)+2x^2e^x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{0}\right)\frac{e^x-1-xe^x}{4x\left(e^x-1\right)+2x^2e^x}\Rightarrow<LOP>=\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^x-xe^x}{4\left(e^x-1\right)+4xe^x+4xe^x+2x^2e^x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{0}{0}\right)\frac{-xe^x}{4\left(e^x-1\right)+8xe^x+2x^2e^x}\Rightarrow<LOP>=\lim_{x\to0}\frac{-e^x-xe^x}{12e^x+12xe^x+2x^2e^x}=-\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow\quad f'(0)=-\frac{1}{12}$$

ב) נגדיר פונקצית עזר $F(x)=\int_{-x}^{x}f(t)dt$ לכל $x\geq 0$ .

$f(x)$ פונקציה רציפה, לכן לפי משפט היסודי של חדו"א $F(x)$ פונקציה גזירה ו-

$$F'(x)=f(x)-f(-x)(-x)'=f(x)+f(-x)$$

נתון ש- $F(x)=0$ לכל $x$ , לכן גם $F'(x)=0$ , כלומר $f(x)=-f(-x)$ לכל $x$ .

## שאלה 4.

א) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left[1+\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right)\right]^{\frac{1}{x}}=\qquad\left(1^\infty\right)\qquad a,b,c>0$$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+A\right]^{\frac{1}{A}\cdot\frac{A}{x}}=e^{\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}\,.\qquad\left\{A=\frac{a^x+b^x+c^x}{3}-1\right\}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x+b^x+c^x-3}{3x}=\frac{1}{3}\left(\ln a+\ln b+\ln c\right)=\frac{1}{3}\ln\left(abc\right)=\ln\sqrt[3]{abc}$$

( השתמשנו בגבול $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$ )

ב)

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^+}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}+$$

$$+\lim_{x\to a^+}\frac{\cancel{\sqrt{x-a}}}{\cancel{\sqrt{x-a}}\sqrt{x+a}}=\lim_{x\to a^+}\frac{x-a}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+\lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=$$

$$=\lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}$$

ג)

$$0=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-ax^2-ax-bx-b}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-a\right)-x\left(a+b\right)-b}{x+1}$$

הגבול באינסוף יכול להיות אפס רק אם חזקה במונה קטנה מחזקת המכנה, לכן $\begin{cases}1-a=0\\ a+b=0\end{cases}$,

כלומר $a=1,\quad b=-1$.

**<u>שאלה 5.</u>**

א)

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\begin{Bmatrix}u=\ln\frac{1+x}{1-x} & du=\frac{2dx}{1-x^2}\\ v=\frac{x^2}{2} & dv=xdx\end{Bmatrix}=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int\frac{1-x^2-1}{1-x^2}dx=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\int dx-\int\frac{1}{1-x^2}dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$$

ב)

$$\int\sin\left(\ln x\right)dx=\begin{Bmatrix}u=\sin\left(\ln x\right) & du=x^{-1}\cos\left(\ln x\right)dx\\ v=x & dv=dx\end{Bmatrix}=x\sin\left(\ln x\right)-\int\cos\left(\ln x\right)dx=$$

$$=\begin{Bmatrix}u=\cos\left(\ln x\right) & du=-x^{-1}\cos\left(\ln x\right)dx\\ v=x & dv=dx\end{Bmatrix}=x\sin\left(\ln x\right)-x\cos\left(\ln x\right)-\int\sin\left(\ln x\right)dx$$

$$\int\sin\left(\ln x\right)dx=\frac{x}{2}\left[\sin\left(\ln x\right)-\cos\left(\ln x\right)\right]+C$$

ג) $\int_1^\infty\frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx$

$$\ln x=t\Rightarrow\qquad x=e^t\Rightarrow\qquad dx=e^tdt$$

$$x=1\Rightarrow t=0,\qquad x\to\infty\Rightarrow t\to\infty$$

$$\int_1^\infty\frac{\ln x}{\sqrt{x^3}}dx=\int_0^\infty\frac{t}{e^{\frac{3}{2}t}}e^tdt=\int_0^\infty te^{-\frac{1}{2}t}dt=\begin{pmatrix}t=u & du=dt\\ e^{-\frac{1}{2}t}dt=dv & v=-2e^{-\frac{1}{2}t}\end{pmatrix}=$$

$$=-2te^{-\frac{1}{2}t}\Big|_{t=0}^{\infty}-\left(-2\right)\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t}dt=0+2\left(-2e^{-\frac{1}{2}t}\right)\Big|_{t=0}^{\infty}=4$$

**<u>שאלה 6</u>**

א) חשבו את שטח התחום המוגבל על ידי הקוים:

$(i)$ הגרף של $f(x)=x+e^{-x}$

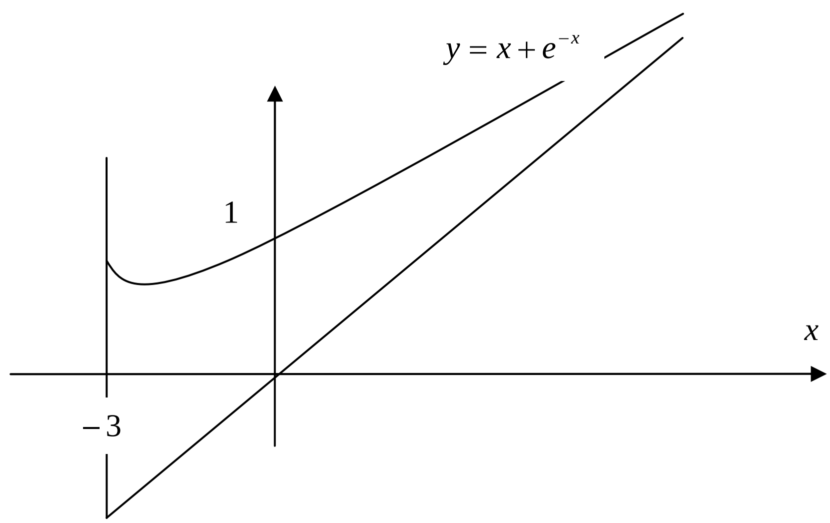
$(ii)$ האסימפטוטה ב $\infty$ ל- $f(x)$

$(iii)$ $x=-3$

<u>פתרון :</u>

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(x+e^{-x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x}}=0 \qquad a=\lim_{x\to\infty}\frac{x+e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{xe^{x}}\right)=1,$$

לכן משוואת האסימפטוטה $y=x$ .




$$S=\int_{-3}^{\infty}\left(x+e^{-x}-x\right)dx=\int_{-3}^{\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_{x=-3}^{x=\infty}=e^{3}$$

ב)

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi a} xydx = 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)(1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2 dt + 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d(\cos t)dt =$$

$$= 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} t\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 3\pi a^3 \int_0^{2\pi} t\,dt + 2\pi a^3 \int_0^{2\pi} t\left(-2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= 6\pi^3 a^3$$

כי $\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 d(\cos t)dt = 0$ ו - $\int_0^{2\pi} t\left(-2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 0$