פתרון מועד ב'

שאלה 1

א) לפי קריטריון קושי צריך להוכיח ש $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n,m>n_0\ \left|a_n-a_m\right|<\varepsilon$

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $n<m$.

$$a_n-a_m=(a_n-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_{n+2})+\ldots+(a_{m-1}-a_m)$$

לכן לפי אי-שוויון המשולש ולפי הנתון בשאלה:

$$|a_n-a_m|\le|(a_n-a_{n+1})|+|(a_{n+1}-a_{n+2})|+\ldots+|(a_{m-1}-a_m)|\le$$
$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^m}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}<\frac{1}{2^n}$$

ובכן, $\left|a_n-a_m\right|<\frac{1}{2^n}$ לכל $n<m$.

לכל $\varepsilon>0$ קיים n_0 כך ש $\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$ ולכן $\left|a_n-a_m\right|<\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon$ $\forall n,m>n_0$.

הקריטריון קושי מתקיים ולכן קיים $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

ב) סדרה כזאת קיימת. נתבונן בסדרה $\{a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\}_{n=1}^{\infty}$. ברור ש- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

$$\Leftarrow\quad\left|a_n-a_{n+1}\right|=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}n|a_n-a_{n+1}|=\sqrt{n}\cdot\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)=\infty\ .$$

שאלה 2.

נשים לב כי: $y(-x)=\sqrt[3]{(-x+2)^2}-\sqrt[3]{(-x-2)^2}=\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)^2}=-y(x)$,

כלומר זו פונקציה אי-זוגית. אסימפטוטה משופעת:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x\left(\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^4}\right)}=$$

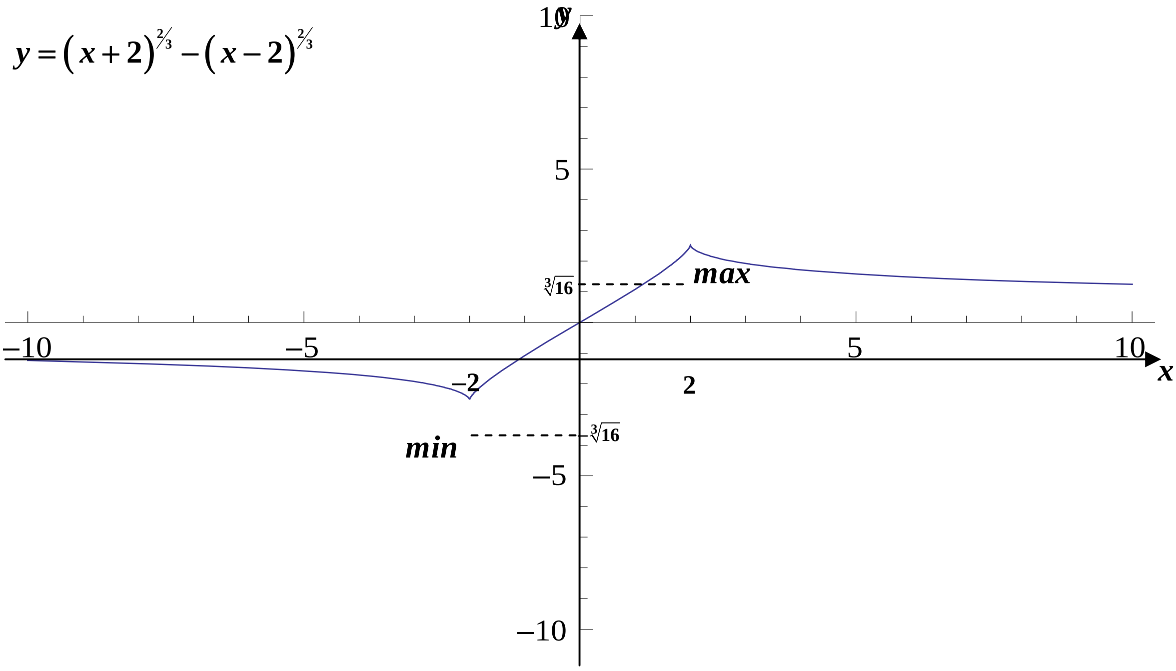
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x\left(\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^4}\right)}=0$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{8x}{\sqrt[3]{(x+2)^4}+\sqrt[3]{(x+2)^2(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-2)^4}}=0$$

לכן $y=0$ אסימפטוטה דו-צדדית.

$$y'=\frac{2}{3}(x+2)^{-1/3}-\frac{2}{3}(x-2)^{-1/3}=0\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{x+2}\Leftrightarrow 0=4\ \varnothing$$,

לכן הנגזרת לא מתאפסת. יש נקודות חשודות לקיצון: $x=\pm2$ (הפונקציה לא גזירה בהן).
מתקיים $y'<0$ כאשר $x>2\ \vee\ x<-2$, וכן $y'>0$ כאשר $-2<x<2$. לכן $x=2$ נקודת מקסימום ו-$x=-2$ נקודת מינימום.



<u>שאלה 3.</u>
א)

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\ \Rightarrow\ (\varepsilon=1)\ \exists M\ \forall x>M\ \ |f(x)-A|<1\ \Rightarrow\ |f(x)|<|A|+1$$

כלומר $|f(x)|\le|A|+1$ $\forall x\ge M$. משום ש $f(x)$ רציפה ב- $[a,\infty)$, היא בפרט רציפה ב $[a,M]$, ולכן

לפי משפט ווירשטראס כי $f(x)$ חסומה ב $[a,M]$, כלומר קיים B כך שלכל $x\in[a,M]$ מתקיים $|f(x)|\le B$. כעת נגדיר $C=\max\{|A|+1,B\}$. נקבל כי $|f(x)|\le C$ לכל $x\in[a,\infty)$.

ב) נשים לב כי $(1+x)^{x^2}=e^{x^2\ln(1+x)}$, וכן:

$$x^2\ln(1+x)=x^2\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=x^3-\frac{x^4}{2}+o(x^4)$$

לכן $(1+x)^{x^2}=e^{x^2\ln(1+x)}=1+x^3+o(x^3)$. מכאן: $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{x^2}-1}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+o(x^3)}{x^n}\neq0$.

לכן בהכרח $n=3$, ו- $1=$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{x^2}-1}{x^3}$.

שאלה 4.
א)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{1-2\left[\frac{1}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right]}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{1-\cos t+\sqrt{3}\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cancel{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^{\cancel{2}}\frac{t}{2}+2\sqrt{3}\cancel{\sin\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{t}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ב)

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln\cosh x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=$$

$$\left\{\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\overset{x\to+\infty}{\Rightarrow}+\infty\right\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2e^x}{e^x\left(1+e^{-2x}\right)}=\ln 2$$

ג)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^{50}}{e^t}\overset{<LOP>}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{50t^{49}}{e^t}\overset{<LOP>}{=}\dots\overset{<LOP>}{=}\lim_{t\to+\infty}\frac{50!}{e^t}=0\qquad\left\{\frac{1}{x^2}=t\underset{x\to 0}{\to}+\infty\right\}$$

שאלה 5 .

א)

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx = \begin{Bmatrix} u=\arcsin x & du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v=-\frac{1}{x} & dv=\frac{dx}{x^2}\end{Bmatrix} = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2}\end{Bmatrix} = -\frac{1}{x}\arcsin x - \int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = -\frac{1}{x}\arcsin x - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= -\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C = -\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$$

ב) תחילה נציג: $\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$. לכן

$$\frac{x}{x^3-3x+2} = \frac{x^2(B+C)+x(A+B-2C)+(2A-2B+C)}{x^3-3x+2}$$

לכן $\begin{cases} B+C=0 \\ A+B-2C=1 \\ 2A-2B+C=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ A-3C=1 \\ 2A+3C=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=0 \\ 3A=1 \\ 3C=-2/3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=2/9 \\ A=1/3 \\ C=-2/9\end{cases}$

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{x-1}\right) + \frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{2}{9}\ln|x+2| + C = \frac{1}{3(1-x)} + \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C$$

ג) $x\to\infty$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\ln x+1)} \sim \frac{1}{x\ln x}$

אינטגרל $\int_a^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$ מתבדר כי $\int_a^x \frac{1}{t\ln t}dt = \ln(\ln x)\Big|_a^x \underset{x\to\infty}{\to} \infty$

ולכן לפי מבחן השוואה אינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\ln x+1)}dx$ גם מתבדר.

שאלה 6.

א)

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^{2x^2-x}\ln t\,dt}{\int_1^x (4t-1)\ln t\,dt} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1}\frac{(4x-1)\ln(2x^2-x)}{(4x-1)\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\ln(2x^2-x)}{\ln x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to1}\frac{\frac{4x-1}{(2x^2-x)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to1}\frac{(4x-1)x}{(2x^2-x)} = 3$$

ב)

$$\frac{2\pi}{\pi+4} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+\sqrt{2}\cos x}\,dx \le \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(רמז: הגדירו $g(x) = x+\sqrt{2}\cos x$ וחקרו אותה בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$)

$$g'(x) = 1-\sqrt{2}\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$g_{\max} = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}+1, \qquad g_{\min} = g(0) = \sqrt{2}, \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

לכן, $\sqrt{2} \le x+\sqrt{2}\cos x \le \frac{\pi}{4}+1 \Rightarrow \frac{4}{\pi+4} \le \frac{1}{x+\sqrt{2}\cos x} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{2\pi}{\pi+4} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x+\sqrt{2}\cos x}\,dx \le \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

ג)

העקומה מוגדרת בצורה פרמטרית.

$\begin{cases} x(r) = r\cos(\varphi(r)) \\ y(r) = r\sin(\varphi(r)) \end{cases}$, כאשר $a \le r \le b$.

$$l = \int_a^b \sqrt{[x'(r)]^2 + [y'(r)]^2}\,dr$$

$$x'(r) = \cos(\varphi(r)) + r(-\sin\varphi(r)))\varphi'(r)$$

$$y'(r) = \sin(\varphi(r)) + r(-\cos\varphi(r)))\varphi'(r)$$

$$[x'(r)]^2 + [y'(r)]^2 = 1 + r^2[\varphi'(r)]^2$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1+r^2[\varphi'(r)]^2}\,dr$$

אם $\varphi(r) = \frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ אז

$$l = \int_1^3 \sqrt{1+r^2\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\right)^2}\,dr = \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{r^2+2+\frac{1}{r^2}}\,dr = \frac{1}{2}\int_1^3 \left(r+\frac{1}{r}\right)dr = 2+\frac{1}{2}\ln 3$$