אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה: __15.02.18__
שם המרצה: ד"ר א.לרמן, ד"ר נ.קרפיבניק
שם הקורס: חדו"א למערכות מידע 1
מספר הקורס: _201-1-9751_____
שנה: תשע"ח סמסטר: א' מועד ב'
משך הבחינה: __3 שעות___
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים)
מחשבון לא גרפי.

<u>הוראות לנבחן:</u>

- כתוב באופן ברור, התחל כל שאלה בעמוד חדש, נמקו את שלבי החישוב. רצוי לבדוק.
- ענה על 4 השאלות.

<u>שאלה 1.</u> (25 נק')

א. (15 נק')

(1) (7 נק') הוכיחו תוך שימוש בהגדרת הגבול : $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^3+1}=0$.

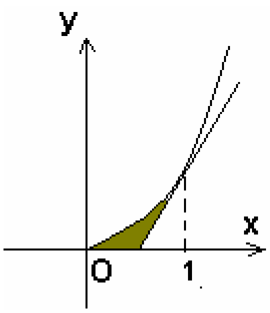
(2) (8 נק') חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x e^{-2t^2}dt-\sin x}{\cos^2 x-1}$.

ב. (10 נק') חשבו את השטח, S **, הכלוא**

בין גרף הפונקציה $y=xe^x$,

הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1,e)$

וציר ה- x **, ראה ציור.**



פתרון:

א1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n^3+1}=0$ **כי :** $\left|\dfrac{2n}{n^3+1}\right|=\dfrac{2}{n^2+1/n}<\dfrac{2}{n^2}<\varepsilon$ $\forall n>N$ $\exists N(\varepsilon)=\left[\sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon}}\right]+1$ $\forall\varepsilon>0$.

א2) חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x e^{-2t^2}dt-\sin x}{\cos^2 x-1}$.

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-2t^2}dt-\sin x}{\cos^2 x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{lop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\cos x}{-2\cos x\cdot\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x^2}-\cos x}{-\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-2x^2}}{\sin 2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{lop}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x+4xe^{-2x^2}}{2\cos 2x}=0$$

ב) נמצא את משוואת המשיק: $y'=e^x+xe^x$. $y'(1)=2e$ ו- $y(1)=e$.

משוואת המשיק : $y=e+2e(x-1)$.

נקודת חיתוך של המשיק עם ציר ה- x : $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

שטח התחום :

$$S=\int_0^1 x\cdot e^x dx-\int_{\frac{1}{2}}^1(-e+2ex)dx=\left(xe^x-e^x\right)\Big|_0^1+e\left(x-x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=1-\frac{e}{4}$$

<u>שאלה 2.</u> (25 נק')

א. (15 נק') תהי פונקציה $f(x)$ **רציפה ב-** $(-\infty,\infty)$ **ומקיימת את השוויון**

$f(f(x))=x$ **לכל** $x\in(-\infty,\infty)$.

הוכיחו כי קיים x_0 **כך ש :** $f(x_0)=x_0$.

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל הבא : $\int_{-2}^{-1}\frac{2x+5}{x^2+4x+5}dx$.

<u>פתרון:</u>

<u>א.</u> הוכחה: נסמן $f(0)=c$. אזי $f(c)=f(f(0))=0$.

אם $c=0$ אזי $x_0=0$ ו $f(x_0)=x_0$. אם $c>0$ נתבונן בפונקציה $f(x)$ בקטע $[0,c]$.

נגדיר פונקציה עזר $g(x)=f(x)-x$.

$g(0)=f(0)-0=c>0$; $g(c)=f(c)-c=-c<0$

אזי לפי משפט "ערך הבינוניים" קיימת נקודה $x_0\in(0,c)$ כך ש $g(x_0)=0$,

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

כלומר $f(x_0)=x_0$. באופן דומה אם $c<0$ נתבונן בפונקציה $f(x)$ בקטע $[c,0]$

ונגדיר פונקציה עזר $g(x)=f(x)-x$. $g(0)=c<0;\quad g(c)=-c>0$

ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים נקודה $x_0\in[c,0)$ כך ש $g(x_0)=0$, כלומר

$f(x_0)=x_0$.

ב.

$$\int_{-2}^{-1}\frac{2x+5}{x^2+4x+5}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{2(x+2)+1}{(x+2)^2+1}dx=\int_{-2}^{-1}\frac{2(x+2)dx}{(x+2)^2+1}+\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=$$

$$=\int_{-2}^{-1}\frac{2(x+2)dx}{(x+2)^2+1}+\int_{-2}^{-1}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+1}=\left(\ln((x+2)^2+1)+\arctan(x+2)\right)\Big|_{-2}^{-1}=$$

$$=\left(\ln((1)^2+1)+\arctan(1)\right)-\left(\ln((0)^2+1)+\arctan(0)\right)=\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

שאלה 3. (25 נק')

א. (15 נק') נתונה הפונקציה:

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x+b-a}{b}\right)^{\frac{2x}{x^2-a^2}}, & x<a\\ e^{2x-b}, & x=a\\ \dfrac{e^x-e^a}{e^{x-a}-1}, & x>a\end{cases}.$$

מצאו ערכי הפרמטרים a ו- b שעבורם תהיה הפונקציה בנקודה $x=a$:

1) רציפה , 2) אי-רציפה מסוג סליקה , 3) אי-רציפה מסוג קפיצה.

ב. (10 נק') חשבו את האינטגרל : $\int\sin^3 x\cdot\ln(\cos x+1)\cdot dx$.

פתרון:

א. עבור $a\neq 0$,

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{e^{x-a}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]\overset{lop}{=}\lim_{x\to a^+}\frac{e^x}{e^{x-a}}=e^a$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^-}\left(1+\frac{x-a}{b}\right)^{\frac{b}{x-a}\cdot\frac{x-a}{b}\cdot\frac{2x}{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a^-} e^{\frac{x-a}{b}\cdot\frac{2x}{(x-a)\cdot(x+a)}}=$$

$$=\lim_{x\to a^-} e^{\frac{2x}{b\cdot(x+a)}}=e^{\frac{1}{b}}\quad (a\neq 0)$$

$$\underline{f(a)=e^{2a-b}}$$

1) **רציפות:** $2a-b=\frac{1}{b}=a \Leftarrow a=b=\pm1$.

2) **אי רציפות סליקה:** $a\cdot b=1, a\neq b \Leftarrow$.

3) **אי רציפות קפיצה:** $a\cdot b\neq 1$.

אם $a=0$, $\lim_{x\to a^-} f(x)=e^{\frac{2}{b}}$, $\lim_{x\to a^+} f(x)=1$ **ו-** $f(a=0)=e^{-b}$.

$e^{\frac{2}{b}}\neq 1$, **לכן הפונקציה לא רציפה עבור** $a=0$ **, ואין לה נקודת אי רציפות סליקה.**

עבור $a=0$ **ו-** $b\neq 0$ **לפונקציה יש נקודת אי רציפות סליקה.**

ב. חשבו את האינטגרל : $\int \sin^3 x\cdot\ln(\cos x+1)\cdot dx$.

$$\int \sin^3 x\cdot\ln(\cos x+1)\cdot dx=\int \sin^2 x\cdot\ln(\cos x+1)\cdot\sin x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos x+1=t\\ -\sin x\,dx=dt\\ \cos x=t-1\end{bmatrix}=-\int(1-(t-1)^2)\cdot\ln t\cdot dt=\int(t^2-2t)\cdot\ln t\cdot dt=$$

$$=\begin{bmatrix} \ln t = u & (t^2-2t)dt = dv \\ \frac{dt}{t} = du & \frac{t^3}{3} - t^2 = v \end{bmatrix} = \left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\ln t - \int\left(\frac{t^2}{3} - t\right)dt =$$

$$= \left(\frac{t^3}{3} - t^2\right)\ln t - \frac{t^3}{9} + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \left(\frac{(\cos x+1)^3}{3} - (\cos x+1)^2\right)\ln(\cos x+1) - \frac{(\cos x+1)^3}{9} + \frac{(\cos x+1)^2}{2} + C$$

<u>שאלה 4.</u> (25 נק')

א. (10 נק') תהי $f: R \to R$ **גזירה שלוש פעמים בנקודה** $x=a$.

הוכיחו כי $f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

(רמז: השתמשו בפיתוח טיילור של פונקציה בסביבת הנקודה $x=a$**)**

ב. (15 נק') מצאו את כל האסימפטוטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+x-2}{|x|-1}$.

פתרון:

א. $$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2} =$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a)+f'(a)\cdot h + \frac{f''(a)}{2!}\cdot h^2 + o(h^2)}{h^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{f(a)-f'(a)\cdot h + \frac{f''(a)}{2!}\cdot h^2 + o(h^2) - 2f(a)}{h^2} \right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f''(a)\cdot h^2 + o(h^2)}{h^2} = f''(a)$$

ב. נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{|x|-1}$.

נקודות אי הגדרה של הפונקציה: $x=\pm1$.

$\underline{x=1}$

$$\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{x^2+x-2}{|x|-1}=\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}=3$$

$x=1$ אינה אסימפטוטה אנכית.

$\underline{x=-1}$

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{x^2+x-2}{-x-1}=\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{x^2+x-2}{-x-1}=\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{(x-1)(x+2)}{-x-1}=\pm\infty$$

$x=-1$ הינה אסימפטוטה אנכית.

נבדוק את האסימפטוטות המשופעות.

ב ∞ : $a=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-2}{x(x-1)}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-2-x^2+x}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2}{x-1}\right)=2$$

ב $-\infty$: $a=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+x-2}{-x(x-1)}=-1$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-2}{-x-1}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-2-x^2-x}{-x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2}{-x-1}\right)=0$$

אסימפטוטות משופעות של הפונקציה:

ב ∞ : $y=x+2$, ב $-\infty$: $y=-x$.

טל. 08-6461761 פקס. 08-6472908
ת.ד. 653 באר-שבע 84105 miriwiz@bgu.ac.il