אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 24.02.12

שם המרצה: ד''ר א. לרמן

שם הקורס: חדו''א מערכות מידע 1

מס' הקורס: 9751-1-201

מיועד לתלמידי: הנדסת מערכות מידע

שנה: תשע''ב סמסטר: א' מועד ב'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: 2 דפי נוסחאות דו-צדדים של סטודנט, מחשבון

מס' נבחן: ______________________________

יש להשיב על 5 בדיוק מתוך 6 השאלות הבאות. לכל שאלה משקל זהה (20 נקודות). נמקו את טענותיכם ושיקוליכם ונסחו במדויק תוצאות קודמות שעליהן הנכם מסתמכים.

שאלה 1.

א) (10 נק') הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

2. קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$.

ב) (10 נק') נתון כי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ ומקיימת $0 \le f(x) \le 1$ לכל x בקטע $[0,1]$

הוכיחו כי למשוואה $e^{f(x)} = e \cdot x - x + 1$ קיים פתרון בקטע $[0,1]$.

שאלה 2.

חקור את הפונקציה הבאה: $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(גבולות חד-צדדיים בנקודות האי-רציפות, תחומי עליה וירידה, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול ואסימפטוטות, סקיצה של גרף)

שאלה 3.

נתונה הפונקציה
$$f(x) = \begin{cases} |5x-15| \quad , & 1 < x < 4 \\ x \cdot e^{-x^2} \quad , & x \ge 4 \end{cases}$$

א) (7 נק') מהו תחום הרציפות של $f(x)$? מיינו את נקודות אי הרציפות.

ב) (7 נק') מצאו את תחום הגזירות של $f(x)$ וכתבו את $f'(x)$ בכל נקודה בתחום הגזירות

ג) (6 נק') בדקו אם האינטגרל הלא אמיתי $\int_4^{\infty} f(x)dx$ מתכנס. אם כן, חשבו את ערכו.

שאלה 4.

א) (12 נק') חשבו את שטח התחום המוגבל על ידי הקוים הבאים:

(i) הגרף של $f(x)=3x+xe^x$

(ii) האסימפטוטה ב- $(-\infty)$ ל- $y=f(x)$

(iii) הנמצא משמאל לישר $x=-3$

ב) (8 נק') נתון כי $f(x)$ פונקציה רציפה זוגית . חשבו את $\int_{-4}^{4}\left(\left(\sin x\right)\cdot f\left(x\right)+\left|x\right|\right)dx$.

שאלה 5.

א) (10 נק') חשב את הגבול: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

א) (10 נק') חשב את האינטגרל : $\int_{1/e}^{e}\frac{\ln x\cdot\sin(\ln x+1)}{x}dx$.

שאלה 6.

א) (14 נק') מצאו תחומי עליה וירידה ותחומי קמירות וקעירות של הפונקציה

$$f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt$$

בתחום $x>0$.

ב) (6 נק') חשבו בקירוב הליניארי את : $sin\left(\frac{\pi}{4}+0.01\right)$.

בהצלחה!

פתרון מועד ב' – 24.02.12

<u>שאלה 1</u>

א)

1.סדרה כזאת לא קיימת. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0$ אז החל מ- n_0 מסוים $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ולכן

$|a_{n+1}|<|a_n|$ ואז $|a_{n+1}|<|a_{n_0}|$ לכל $n\ge n_0$. מפה נובע שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה

ולכן לא יכול להיות ש- $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

2 . לדוגמה : $a_n=3^n$

ב) נגדיר פונקציה חדשה $g(x)=e^{f(x)}-e\cdot x+x-1$. **נתון כי** $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$

ולכן $g(x)$ רציפה גם כן בקטע $[0,1]$ כהרכבה וסכום של פונקציות רציפות.

$$g(0)=e^{f(0)}-e\cdot 0+0-1=e^{f(0)}-1\ge 0$$

$$g(1)=e^{f(1)}-e\cdot 1+1-1=e^{f(1)}-e\le 0$$

הסבר:

אם $f(0)=0$ או $f(1)=1$ $\Leftarrow$ $g(0)=0$ או $g(1)=0$

וסיימנו כי מצאנו למשוואה פתרון בקטע $[0,1]$.

אחרת , מכך ש- $0\le f(x)\le 1$ נקבל

$$g(0)>0\Leftarrow f(0)>0\Leftarrow f(0)\ne 0$$

וגם $g(1)<1\Leftarrow f(1)<1\Leftarrow f(1)\ne 1$. כלומר $g(1)\cdot g(0)<0$.

לכן מתקיימים כל תנאי משפט ערך הביניים עבור הפונקציה $g(x)$ ולכן קיימת נקודה $-1<c<0$

כך ש- $f(c)=0$.

אי לכך למשוואה המקורית יש לפחות פתרון אחד.

שאלה 2

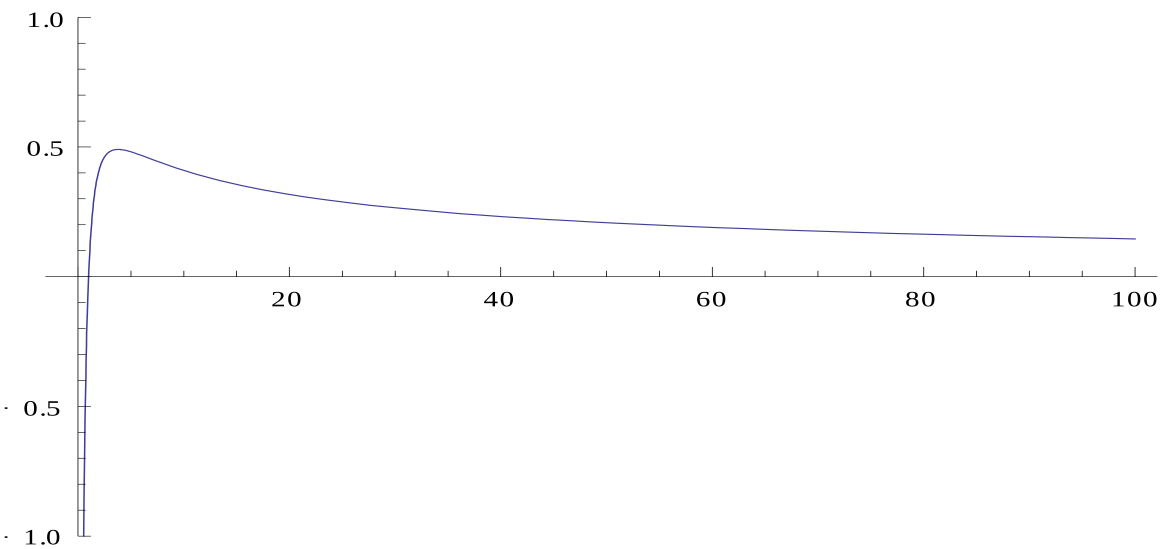
$y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. תחום ההגדרה: $x>0$. חיתוך עם ציר ה- x : $(1,0)$.

$y'=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow \ln x=2\Leftrightarrow x=e^2$. $y''=\frac{3\ln x-8}{4x^2\sqrt{x}}$. לכן $y''\left(e^2\right)=\frac{-2}{4e^5}<0$, לכן

$\left(e^2,2e^{-1}\right)$ נקודת מקסימום. אסימפטוטה אנכית: $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty$. אסימפטוטה משופעת:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x\sqrt{x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{3/2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x\sqrt{x}}=0,\ b=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/2\ 1/\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

לכן $y=0$ אסימפטוטה מימין.



שאלה 3

נתונה הפונקציה
$$f(x)=\begin{cases}|5x-15| & , \quad 1<x<4\\ x\cdot e^{-x^2} & , \quad x\geq 4\end{cases}$$

א) מהו תחום הרציפות של $f(x)$? מיינו את נקודות אי הרציפות.

ב) מצאו את תחום הגזירות של $f(x)$ וכתבו את $f'(x)$ בכל נקודה בתחום הגזירות

ג) בדקו אם האינטגרל הלא אמיתי $\int_4^\infty f(x)dx$ מתכנס. אם כן, חשבו את ערכו.

פתרון:
א. בתחום- $(1,4)\cup(4+\infty)$ הפונקציה רציפה לפי חוקי האריתמטיקה של פונקציות רציפות .

נותר לבדוק את רציפות הפונקציה בנקודה $x=4$.

$$\lim_{x\to4^+} f(x)=\lim_{x\to4^+} xe^{-x^2}=4e^{-16}\neq\lim_{x\to4^-} f(x)=\lim_{x\to4^-}|5x-15|=5$$

לכן הפונקציה לא רציפה בנקודה - $x=4$ (אי - רציפות סליקה).

ב) תחום הגזירות של $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}15-5x & 1<x<3\\ 5x-15 & 3<x<4\\ xe^{-x^2} & 4<x\end{cases}$$

בתחום - $(1,3)\cup(3,4)\cup(4+\infty)$ הפונקציה גזירה לפי חוקי האריתמטיקה של פונקציות גזירות.

$$f'(x)=\begin{cases}-5 & 1<x<3\\ 5 & 3<x<4\\ e^{-x^2}-2x^2e^{-x^2} & 4<x\end{cases}$$

בנקודה $x=4$ הפונקציה לא רציפה לכן לא גזירה .

נותר לבדוק את גזירות הפונקציה בנקודה $x=3$.

$$\lim_{x\to3^+} f'(x)=\lim_{x\to3^+} 5=5\neq\lim_{x\to3^-} f'(x)=\lim_{x\to3^-} -5=-5$$

לכן הפונקציה לא גזירה $x=3$.

ג. $$\int_4^X te^{-t^2}dt=\left[-\frac{e^{-t^2}}{2}\right]_4^X=-\frac{e^{-X^2}}{2}+\frac{e^{-16}}{2}$$

לכן: $$\int_4^{+\infty} te^{-t^2}dt=\lim_{X\to-\infty}-\frac{e^{-X^2}}{2}+\frac{e^{-16}}{2}=\frac{e^{-16}}{2}$$

שאלה 4

א) חשבו את שטח התחום המוגבל על ידי הקוים הבאים:

(i) הגרף של $f(x)=3x+xe^x$

(ii) האסימפטוטה ב- $(-\infty)$ ל- $y=f(x)$

(iii) הנמצא משמאל לישר $x=-3$

משוואת האסימפטוטה ב- $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(3x+xe^x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(3+e^x)=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$$

לכן: $y=3x$ הוא האסימפטוטה ב- $-\infty$:

(הערה): בקטע $(-\infty,-3]$ מתקיים $3x>3x+xe^x$ כלומר האסימפטוטה נמצאת מעל הגרף.

לכן השטח התחום המבוקש שווה: $S=\lim_{X\to-\infty}\int_X^{-3}\left(3t-f(t)\right)dt=\lim_{X\to-\infty}\int_X^{-3}-te^t\,dt$

$$\int_X^{-3}-te^t\,dt\underset{\substack{u=-t \quad u'=-1\\ v'=e^t \quad v=e^t}}{=}\left[-te^t\right]_X^{-3}+\int_X^{-3}e^t\,dt=(3e^{-3}+Xe^X+\left[e^t\right]_X^{-3})=4e^{-3}+Xe^X-e^X$$

לכן: $S=\lim_{X\to-\infty}\int_X^{-3}\left(3t-f(t)\right)dt=4e^{-3}$.

ב) נרשום את האינטגרל $\int_{-4}^{4}\left(\sin x\cdot f(x)+|x|\right)dx$ כסכום של שניים:

$$\int_{-4}^{4}\left(\sin x\cdot f(x)+|x|\right)dx=\int_{-4}^{4}\sin x\cdot f(x)dx+\int_{-4}^{4}|x|dx\underset{(*)}{=}\int_{-4}^{4}\sin x\cdot f(x)dx+\int_{-4}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{4}xdx=$$

$$=0-\frac{x^2}{2}\Big|_{-4}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{-4}=8+8=16$$

(*) - הפונקציה $\left(\sin x\cdot f(x)\right)$ אי-זוגית בקטע הסימטרי $[-4,4]$, לכן $\int_{-4}^{4}\sin x\cdot f(x)dx=0$.

שאלה 5

א)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin 3x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right]^{\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin 3x}\cdot\frac{3x}{3x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\sin x)\cos x}\cdot\frac{1}{3x}}=e^{0}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{3\cdot\cos x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1+\sin x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{(1+\sin x)}\cdot\frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{4}}=0$$

ב) $\int_{1/e}^{e}\frac{\ln x\cdot\sin(\ln x+1)}{x}dx$

$$\int_{1/e}^{e}\frac{\ln x\cdot\sin(\ln x+1)}{x}dx=\left|\begin{array}{l}t=\ln x,dt=\frac{1}{x}dx\\ x=\frac{1}{e}\Rightarrow t=-1\\ x=e\Rightarrow t=1\end{array}\right|=\int_{-1}^{1}t\cdot\sin(t+1)dt=\left|\begin{array}{l}u=t,\quad u'=1\\ v'=\sin(t+1),\ \ v=-\cos(t+1)\end{array}\right|=$$

$$=-t\cos(t+1)\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\cos(t+1)dt=-\cos(2)+1+\sin(t+1)\Big|_{-1}^{1}=1-\cos(2)+\sin(2)$$

שאלה 6

א) מצאו תחומי עליה וירידה ותחומי קמירות וקעירות של הפונקציה $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt$

בתחום $x>0$.

מהמשפט היסודי של החדו"א ניתן לקבוע שהפונקציה $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt$ גזירה בתחום $x>0$

כי : t^2e^{-t} רציפה ולכן $f(u)=\int_0^{u} t^2e^{-t}dt$ גזירה,

הפונקציה $u=\sqrt{x}$ גזירה בתחום $x>0$,

הרכבה של פונקציות גזירות היא פונקציה גזירה ולכן $f(u(x))=\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt$ גזירה בתחום $x>0$ ומתקיים:

$$f'(x)=\left(\int_0^{\sqrt{x}} t^2e^{-t}dt\right)'=\left(\sqrt{x}\right)^2 e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2}e^{-\sqrt{x}}$$

$$f''(x)=\left(\frac{\sqrt{x}}{2}e^{-\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{4\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$$

מתקיים $f'(x)>0$ לכל x בתחום $x>0$ ולכן $f(x)$ פונקציה עולה בתחום $(0,\infty)$.

בתחום $0<x<1$ מתקיים $f''(x)>0$ ולכן $f(x)$ קמורה (מחייכת) בקטע $(0,1)$.

בתחום $x>1$ מתקיים $f''(x)<0$ ולכן $f(x)$ קעורה (עצובה) בקטע $(1,\infty)$.

ב) $f(x)=\sin x\,,\ f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f'(x)=\cos x\,,\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

באופן כללי הקרוב הליניארי לערך של פונקציה בנקודה x ניתן לחישוב לפי הנוסחה $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

במקרה שלנו $x=\frac{\pi}{4}+0.01\,,\ x_0=\frac{\pi}{4}$ ולכן $f\left(\frac{\pi}{4}+0.01\right)\approx\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(0.01)$