אוניברסיטת בן גוריון בנגב

המחלקה למתמטיקה

מבוא למשוואות דיפרנציאליות רגילות

אוסף תרגילים

201-1-9031 ,201-1-0061

201-1-9841 ,201-1-9171

ערכה: דר' נטליה גולקו

באר שבע, תשס''ג

תוכן עניינים

§ 1 משוואות ליניאריות מהסדר הראשון

המשוואה

$$y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$$

כאשר $g(x)$ ו-$q(x)$ - הינם פונקציות רציפות בקטע משותף נקראת <u>משוואה ליניארית מסדר ראשון.</u>

פתור :

1. $xy' - y = -x$
2. $y' + y = e^{-x}$
3. $xy' + y = \sin x$
4. $y' - y\cot(x) = \cot x$
5. $x^2y' - 2xy = 3$
6. $xy' - xy = \left(1 + x^2\right)e^x$
7. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$
8. $xy' - ny = e^x x^{n+1}$
9. $y' - y / \sin x = \tan x / 2$
10. $y' + 2xy = 2x^3$
11. $y' - y\sin x = \sin x \cos x$
12. $xy' - 2y = 2x^4$
13. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$
14. $y' + y\tan x = \sec x$
15. $\left(xy + e^x\right)dx - xdy = 0$
16. $x^2y' + xy + 1 = 0$
17. $y = x\left(y' - x\cos x\right)$
18. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y\, dy$
19. $2x\left(x^2 + y\right)dx = dy$
20. $\left(xy' - 1\right)\ln x = 2y$
21. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$
22. $\left(x + y^2\right)dy = ydx$
23. $\left(2e^y - x\right)y' = 1$
24. $\left(\sin^2 y + x\cot y\right)y' = 1$

.25 $y' = y \,/\, \left(3x - y^2\right)$ .26 $(1-2xy)y' = y(y-1)$

המשוואה $y'(x) + q(x)y(x) = g(x)y^n$ $\quad (n \neq 0)$

נקראת משוואת ברנולי. מהמשוואה אפשר לעבור למשוואה ליניארית מסדר

ראשון ע"י חלוקה ב y^n משני הצדדים והחלפת משתנים $1 / y^{n-1} = z$

המשוואה $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$

נקראת משוואת ריקטי.

.27 $y' + 2y = y^2 e^x$ .28 $(x+1)\left(y' + y^2\right) = -y$

.29 $y' = y^4 \cos x + y \tan x$ .30 $xy^2 y' = x^2 + y^3$

.31 $xydy = \left(y^2 + x\right)dx$ .32 $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

.33 $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ .34 $2y' - x / y = xy \,/\, \left(x^2 - 1\right)$

.35 $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$ .36 $\left(2x^2 y \ln y - x\right)y' = y$

.37 $xdx = \left(x^2 - 2y + 1\right)dy$ .38 $(x+1)\left(yy' - 1\right) = y^2$

.39 $x\left(e^y - y'\right) = 2$ .40 $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$

.41 $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$ .42 $3y' + y^2 + 2 / x^2 = 0$

.43 $\left(x^2 - 1\right)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$

.44 $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$ .45 $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$

אם משוואה דיפרנציאלית נתונה יחד עם הנקודה (x_0, y_0) שדרכה יעבור פתרון המשוואה, הבעיה נקראת בעיה עם תנאי התחלה או בעית קושי.

פתור בעיות קושי:

46. $\left(1+x^2\right)y' - xy = 2x\,;\ y|_{x=0} = 0$

47. $xy' - 3y = x^4e^x\,;\ y|_{x=1} = e$

48. $y'\sin x - y\cos x = 1\,;\ y|_{x=\pi} = 1$

49. $xy' - 2y = x^3e^x\,;\ y|_{x=1} = 0$

50. $y' - y\tan x = \sec x;\ y|_{x=0} = 0$

51. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}\,;\ y|_{x=0} = 1$

52. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}\,;\ y|_{x=1} = 1$

53. $y' - y\tan x = y^4\cos x\,;\ y|_{x=\pi} = -1$

54. $xdy - ydx = 2x^3dx\,;\ y|_{x=2} = 7$

55. $\left(3x - y^2\right)dy / dx = y\,;\ y|_{x=2} = 1$

§ 2 משוואות עם המשתנים הניתנים להפרדה.

משוואה בעלת אחת מהצורות הבאות

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{או} \quad M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

נקראת המשוואה הנתנת להפרדת המשתנים. לפתירת המשוואה מכפילים או מחלקים באיזו ביטוי כך, שצד אחד של המשוואה יכלול רק את המשתנה תלוי וצד השני יכלול רק את המשתנה בילתי-תלוי.

56. $x^2yy' + 1 = y^2$

57. $1 + e^xydy / dx = 0$

58. $xy' = 2y$

59. $xydx + \left(x^2+1\right)dy = 0$

$2yy' = 1-3x^2$ .60

$(x^2y^2 - x^2y)dy - xy^2dx = 0;\ x \neq 0$ .61

$\sqrt{1-x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$ .62

$2(xy+y)dx = xdy$ .63

$\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx$ .64

$e^x(1+e^y)dx + e^y(1+e^x)dy = 0$ .65

$xy' = \ln|x|$ .66

$y' = \sin^3 x$ .67

$\sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy = 0$ .68

$(xy+x)dx \,/\, dy = 1$ .69

$(1+x^2)dy - (xy+x)dx = 0$ .70

$x^2y' - 2xy = 3y$ .71

פתור בעיות קושי :

$(1+x^2)dy - 2x(y+3)dx = 0;\ y|_{x=0} = -1$ .72

$dx \,/\, (\cos^2 x \cos y) + \cot x \sin y\, dy = 0;\ y|_{x=\pi/3} = \pi$ .73

$y' \tan x = 1+y;\ y|_{x=\pi/6} = -0.5$ .74

$y'\sqrt{1-x^2} = x;\ y|_{x=1} = 0$ .75

$dy \,/\, \sqrt{y} + dx = dx \,/\, \sqrt{x};\ y|_{x=0} = 1$ .76

$(2x-1)dy = (y+1)dx;\ y|_{x=5} = 0$ .77

$(1-x^2)dy + xydx = 0;\ y|_{x=0} = 4$ .78

$dy + y\tan x\, dx = 0;\ y|_{x=0} = 1$ .79

$\cos x \sin y\, dy - \cos y \sin x\, dx = 0;\ y|_{x=\pi} = \pi$ .80

האם הפתרון הינו יחיד? הסבר מדוע

פתור :

$xydx + (x+1)dy = 0$ .81

$\sqrt{y^2+1}dx = xydy$ .82

$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$ .83

$y' \cot x + y = 2$ .84

.85 $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ .86 $xy' + y = y^2$

.87 $2x^2yy' + y^2 = 2$ .88 $y' - xy^2 = 2xy$

.89 $e^{-s}\left(1 + ds/dt\right) = 1$ .90 $z' = 10^{x+z}$

.91 $x\,dx/dt + t = 1$ .92 $x' = \cos(y - x)$

.93 $y' - y = 2x - 3$ .94 $(x + 2y)y' = 1$

.95 $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ .96 $x^2y' - \cos 2y = 1$

§3 משוואות מדויקות וגורם האינטגרציה

המשוואה

$$(*) \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

נקראת <u>משוואה מדויקת</u> אם צד שמאל שלו הינו דיפרנציאל של איזו פונקציה $F(x,y)$ זה נכון, אם $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$. לפתירת המשוואה (*) מחפסים את הפונקציה $F(x,y)$ כך שדיפרנציאל שלה $dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy$ תהיה שווה לצד השמאלי של המשוואה (*). לכן הפתרון יהיה בצורה: $F(x,y) = C$

פתור:

.97 $\left(2x + 3x^2y\right)dx + \left(x^3 - 3y^2\right)dy = 0$ .98 $2xy\,dx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$

.99 $\left(2 - 9xy^2\right)x\,dx + \left(4y^2 - 6x^3\right)y\,dy = 0$ .100 $e^{-y}dx - \left(2y + xe^{-y}\right)dy = 0$

$$\frac{y}{x}\,dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0 \quad .101$$

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3}\,dy = 0 \quad .102$$

$$2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}\,dy = 0 \quad .103$$

$$\left(1 + y^2 \sin 2x\right)dx - 2y\cos^2 x\,dy = 0 \quad .104$$

$$3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - x^3 / y\right)dy \quad .105$$

$$\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{\left(x^2 + 1\right)\cos y}{\cos 2y - 1}\,dy = 0 \quad .106$$

$$\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + y\,dy = 0 \quad .107$$

$$y\,dx - \left(4x^2 + x\right)dy = 0 \quad .108$$

$$\left(x^2 + y^2 + y\right)dx - x\,dy = 0 \quad .109$$

$$x\,dx = \left(x\,dy + y\,dx\right)\sqrt{1 + x^2} \quad .110$$

$$xy^2\left(xy' + y\right) = 1 \quad .111$$

$$\left(y^4 - 4xy\right) + \left(2xy^3 - 3x^2\right)dy / dx = 0 \quad .112$$

$$\left(xy + y^4\right)dx + \left(x^2 - xy^3\right)dy = 0 \quad .113$$

$$y' = \left(x^2 + 2x + y\right) / \left(x - 3x^2 y\right) \quad .114$$

$$\left(y\,dx - x\,dy\right)\sqrt{1 + x^2} + xy^2\,dx = 0 \quad .115$$

$$y^2\,dx - \left(xy + x^3\right)dy = 0 \quad .116$$

$$\left(y - \frac{1}{x}\right)dx - \frac{dy}{y} = 0 \quad .117$$

$$\left(2x^3y^2 + 4x^2y + 2xy^2 + xy^4 + 2y\right)dx + \left(2y^3 + 2x^2y + 2x\right)dy = 0 \quad .118$$

$$y' = \frac{x}{2x^2y + y^3} \quad .119$$

$$y^2 = \left(xy + x^3\right)y' \quad .120$$

$$\left(x^4 + 3\ln y\right)y\,dx - x\,dy = 0 \quad .121$$

$$y^2dx + \left(xy + \tan xy\right)dy = 0 \quad .122$$

§ 4 משוואות דיפרנציאליות הומוגניות

משוואה דיפרנציאלית בעלת אחת מהצורות

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad \text{או} \qquad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

כאשר $N(x,y)$ ו-$M(x,y)$ הינן פונקציות הומוגניות מאותו סדר נקראת <u>משוואה דיפרנציאלית הומוגנית</u>. פונקצית $g(x,y)$ נקראת הומוגנית מסדר k אם עבור כל $t \neq 0$ נכונה הזהות הבאה: $g(tx,ty) = t^k g(x,y)$

פתור:

123. *מצא משוואת העקומה, אם נתונה נקודה $A(1;0)$ שדרכה עוברת העקומה וידוע ששיפוע של משיק שלה בכל נקודה שווה:* $(2x+y)/2x$

124. $\frac{2}{3}\,xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$

125. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$

126. $x^2y' = y^2 - xy + x^2$

---

127. $\left(x^2 - 2xy\right)dy - \left(xy - y^2\right)dx = 0$

128. $x^3dy - y\left(x^2 + y^2\right)dx = 0$

129. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + xdy = 0$

130. $xyy' = x^2 + y^2$

131. $2xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$

132. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

כתוב פתרונות פרטיים:

133. $xy^2y' = x^3 + y^3\,;\; y|_{x=1} = 3$

134. $(x-y)dx + xdy = 0;\; y|_{x=1} = 0$

135. $y^2dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0\,;\; y|_{x=1} = 1$

136. $xy + y^2 - \left(2x^2 + xy\right)y' = 0\,;\; y|_{x=1} = 1$

137. $x^2y' = xy + y^2\,;\; y|_{x=1} = 1$

138. $y'\left(x^2 + xy\right) = y^2\,;\; y|_{x=2} = 2$

139. $(x+2y)dx - xdy = 0$

140. $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$

141. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2dy = 0$

142. $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$

---

143. $y^2 + x^2y' = xyy'$

144. $\left(x^2+y^2\right)y' = 2xy$

145. $xy' - y = x\tan\dfrac{y}{x}$

146. $xy' = y - xe^{y/x}$

147. $xy' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x}$

148. $xy' = y\cos\ \ln\dfrac{y}{x}$

149. $\left(y+\sqrt{xy}\right)dx = xdy$

150. $xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$

151. $(2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0$

152. $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$

153. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$

154. $(x+4y)y' = 2x+3y-5$

155. $(y+2)dx = (2x+y-4)dy$

---

156. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

157. $\left(y'+1\right)\ln\dfrac{x+y}{x+3} = \dfrac{x+y}{x+3}$

158. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \tan\dfrac{y-2x}{x+1}$

159. $x^3\left(y'-x\right) = y^2$

160. $2x^2y' = y^3 + xy$

161. $2xdy + \left(x^2y^4+1\right)ydx = 0$

162. $ydx + x(2xy+1)dy = 0$

163. $2y' + x = 4\sqrt{y}$

164. $y' = y^2 - 2/x^2$

165. $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$

5 § משוואות דיפרנציאליות שונות מסדר ראשון.

.166 $xy' + x^2 + xy - y = 0$

.167 $2xy' + y^2 = 1$

.168 $\left(2xy^2 - y\right)dx + xdy = 0$

.169 $y - y' = y^2 + xy'$

.170 $\left(x + 2y^3\right)y' = y$

.171 $x^2y' = y(x + y)$

.172 $\left(1 - x^2\right)dy + xydx = 0$

.173 $y + y'\ln^2 y = (x + 2\ln y)y'$

.174 $x^2y' - 2xy = 3y$

.175 $y = \left(xy' + 2y\right)^2$

.176 $y' = 1 / \left(x - y^2\right)$

.177 $x - \dfrac{y}{y'} = \dfrac{2}{y}$

.178 $(x + y)^2 y' = 1$

.179 $2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$

.180 $\dfrac{dx}{x} = \left(\dfrac{1}{y} - 2x\right)dy$

.181 $xy' = e^y + 2y'$

.182 $2\left(x - y^2\right)dy = ydx$

.183 $dy + \left(xy - xy^3\right)dx = 0$

.184 $2x^2y' = y^2\left(2xy' - y\right)$

.185 $\dfrac{y - xy'}{x + yy'} = 2$

.186 $y\left(y - xy'\right) = \sqrt{x^4 + y^4}$

.187 $\left(1 - x^2\right)y' - 2xy^2 = xy$

.188 $y' + y = xy^3$

.189 $\left(xy^4 - x\right)dx + (y + yx)dy = 0$

.190 $(\sin x + y)dy + \left(y\cos x - x^2\right)dx = 0$

.191 $yy' + y^2\cot x = \cos x$

.192 $\left(e^y + 2xy\right)dx + \left(e^y + x\right)xdy = 0$

.193 $x(x + 1)\left(y' - 1\right) = y$

.194 $x^2(dy - dx) = (x + y)ydx$

.195 $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$

.196 $(x\cos y + \sin 2y)y' = 1$

.197 $y' = \dfrac{x}{y}e^{2x} + y$

.198 $(4xy - 3)y' + y^2 = 1$

.199 $y'\sqrt{x} = \sqrt{y - x} + \sqrt{x}$

6 § משוואות דיפרנציאליות ניתנות להורדת סדר.

1.אם המשוואה נתונה בצורה $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)}\right) = 0$ ואינה כוללת את

המשתנה התלוי y ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה: $y^{(k)} = z$

כאן בתור פונקציה חדשה נקח נגזרת של y מסדר הכי נמוך.

2. אם המשוואה נתונה בצורה $F\left(y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right) = 0$ ואינה כוללת את

המשתנה הבילתי-תלוי x ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה:

$y' = p(y)$. כאן y מתפקד בתור משתנה בילתי-תלוי חדש. לכן $y'' = p'p$

3. אם המשוואה הינה הומוגנית כלפי y וכל הנגזרת שלה, זאות אמרת

שהמשוואה אינה תשתנה עקב החלפה $y,y',y'',\ldots,y^{(n)}$ ב $ky,ky',ky'',\ldots,ky^{(n)}$

ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה: $y' = yz$ כאן z - פונקציה חדשה.

4. אם עקב הצבות $x = kx, y = k^m y$ (*) $(\ldots y'' = k^{(m-2)}y'', y' = k^{(m-1)}y')$

המשוואה אינה תשתנה. לשם בדיקת הומוגניות של המשוואה וקבלת ערכו

של המספר "m" צריך להשוות בין כל חזקות של "k" אחרי הצבה (*)

אם למשוואה הנתקבלת כלפי "m" פיתרון אינו קיים, המשוואה אינה הומוגנית.

אם הפתרון קיים, ניתן לעשות החלפת משתנים: $x = e^t,\ y = ze^{mt}$

כאן $z = z(t)$ -פונקציה חדשה ו t -משתנה בילתי-תלוי חדש. עתה

נקבל משוואה, שאינה מכילה את המשתנה הבילתי-תלוי. מכאן להורדת הסדר

ניתן להשתמש באחת מהגישות .1 ,.2 או 3.

5. אם המשוואה ניתנת לשינוי כך שמשני הצדדים נתקבל דיפרנציאל של פונקציה כלשהי לפי x זה מאפשר דרך להורדת הסדר. לדוגמה: נתונה המשוואה:

$$yy'' = y'^2$$

כתוצאה מחלוקה ב־yy' משני הצדדים:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y}$$

$$\left(\ln y'\right)' = \left(\ln y\right)'$$

$$\ln y' = \ln y + \ln C$$

$$y' = yC \qquad (**)$$

קיבלנו (**) - משוואה מסדר ראשון.

פתור:

.200 $2yy'' = y'^2 + 1$

.201 $yy'' - y'^2 = 0$

.202 $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$

.203 $xy'' - y' - x^2yy' = 0\,;\, y|_{x=1} = 0\,;\, y'|_{x=1} = 2$

.204 $yy'' - y'^2 = y'$

.205 $x^4y'' + \left(xy' - y\right)^3 = 0$

206 $y^{-1}y'^2y'' - 2y''^2 + y'y''' = 0$

.207 $y^3y'' = 1$

.208 $y''\left(e^x + 1\right) + y' = 0$

.209 $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$

.210 $y''\cos y + y'^2\sin y = y'\,;\, y|_{x=-1} = \pi / 6\,;\, y'|_{x=-1} = 2$

.211 $2y''' - 3y'^2 = 0\,;\, y|_{x=0} = -3\,;\, y'|_{x=0} = 1\,;\, y''|_{x=0} = -1$

.212 $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$

.213 $xyy'' - xy'^2 = yy'$

.214 $y\left(xy'' + y'\right) = xy'^2(1 - x)$

$$\left(y'\right)^3 - 3(x-5)\,y' + 3y = 0 \quad .215$$

$$y'' + \left(y'\right)^2 = y\,;\; y\big|_{x=0} = 1\,;\; y'\big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad .216$$

$$xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x} \quad .218 \qquad\qquad y'' - \frac{1}{x} = e^x \quad .217$$

$$2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0\,;\; y\big|_{x=0} = 1\,;\; y'\big|_{x=0} = 2 \quad .219$$

$$y'y^{iv} = y''y''',\quad y'>0, y''>0, y'''<0 \;\text{(ב}\qquad xyy''+xy'=2yy' \;\text{(א}\; .221 \qquad y'' = e^y \quad .220$$

$$y'^2 + 2yy'' = 0 \quad .223 \qquad\qquad x^2yy'' = \left(y - xy'\right)^2 \quad .222$$

$$\begin{gathered}3y'''\cdot y - y'y'' = 0;\\ y(1)=1;\; y'(1)=3;\; y''(1)=6\end{gathered} \;\text{(ב} \qquad ;\quad yy''+1=y'^2 \;\text{(א}\; .224$$

§7 משוואות דיפרנציאליות מהסדר השני עם מקדמים קבועים

.1 משוואה מצורה

$$ay'' + by' + cy = 0$$

ליניארית הומוגנית מהסדר השני לפתירת המשוואה בונים עבורה את המשוואה

האופינית. פתרון למשוואה מסדר שני יהיהנה תלוי בשורשים של המשוואה

האופינית.

שורשים של המשוואה האופינית	צורתו של פתרון למשוואה מסדר שני
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ממשים	$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ממשים	$y = e^{\lambda x}\left(C_1 + C_2x\right)$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ מרוכבים $\lambda_i = \alpha + i\beta$	$y = e^{\alpha x}\left(C_1\sin\beta x + C_2\cos\beta x\right)$
כאן $Re(\lambda) = \alpha\,; Im(\lambda) = \beta$	

טבלה מס' 1

.2 משוואה מצורה

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

<u>לינארית אי-הומוגנית מהסדר השני.</u> צורה שבה נחפש הפתרון הפרטי תהיה

תלויה בצורה של $f(x)$

צורה של הפתרון פרטי y_1	$f(x)$
$y_1 = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}$	$f(x) = P_m(x) e^{\gamma x}$; $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$
$y_1 = x^s e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x\right)$	$f(x) = e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right)$

טבלה מס'2

כאן $s = 0$ אם γ ב $f(x)$ בשורה ראשונה של הטבלה מס'2 או $\alpha + i\beta$ ב$f(x)$ בשורה השניה של הטבלה איננו שורש של המשוואה האופינית. אחרת s היא ריבוי של שורש γ או $\alpha + i\beta$ במשוואה האופינית.

~~אם $f(x)$ נתון בצורה שונה מזאת שבטבלה פתרון של משוואה~~ אי-הומוגנית אפשר לקבל ע"י שימוש בשיטת ווריאציה של קבועים.

בכול מקרה פתרון למשוואה אי-הומוגנית שווה לסכום של פתרון כללי לחלק הומוגני ופתרון פרטי עבור חלק אי-הומוגני.

פתור:

.225 $y'' + y' - 2y = 0$ .226 $y'' - 2y' - 2y = 0$

.227 $y'' - 4y' + 5y = 0$ .228 $y'' + 4y' + 3y = 0$

.229 $y'' + y = 4xe^x$ .230 $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

$y'' - 6y' + 9y = 50\sin t \,;\, y|_{t=0} = 1 \,;\, y'|_{t=0} = -2$ .231

$y'' - 6y' + 9y = x^2e^{3x} - 8e^{3x}$ *.232

$y'' - 2y' - y = 6xe^x$ .233

$y'' - 2y' + y = xe^x + 4$ *.234

$y'' - 2y' + 2y = \cos t \,;\, y|_{t=0} = 1 \,;\, y'|_{t=0} = 0$ .235

$y'' - 2y' + 2y = e^{-t} \,;\, y|_{t=0} = 0 \,;\, y'|_{t=0} = 1$ .236

$y'' - y = 2e^x - x^2$ .237

$y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$ .238

$y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$ *.239

$y'' - 8y' + 20y = 5x\,e^{4x}\sin 2x$ *.240

$y'' - 9y = e^{-3x}\left(x^2 + \sin 3x\right)$ *.241

$y'' - 6y' + 13y = x^2e^{3x} - 3\cos 2x$ *.242

$y'' - 9y = e^{-3x}\left(x^2 + \sin 3x\right)$ *.243

$y'' - y = 4\sinh x$ *.244

$y'' + y = 4e^x \,;\, y|_{x=0} = 4 \,;\, y'|_{x=0} = -3$ .245

$y'' - 2y = 2e^x \,;\, y|_{x=1} = -1 \,;\, y'|_{x=1} = 0$ .246

$y'' + 2y' + y = xe^{-x} \,;\, y|_{x=0} = 1 \,;\, y'|_{x=0} = 0$ .247

$y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$ .248

$y'' - 3y' + 2y = x\cos x$ .249

$y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$ .250

8 § שיטת הווריאציה לפתירת משוואות דיפרנציאליות מסדר "N" ומשוואת אוילר

~~לפתירת המשוואה מסדר "n"~~

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} +\dots+a_{n-1}y' + a_ny = f(x)$$

אפשר להשתמש שיטת השוואת המקדמים (עמוד 14) ובשיטת הווריאציה של קבועים. נניח שקיבלנו פתרון כללי עבור החלק ההומוגני של המשוואה:

$$y = C_1y_1 +\dots+C_ny_n$$

עתה פתרון למשוואה לא הומוגנית נחפש בצורה

$$y = C_1(x)y_1 +\dots+C_n(x)y_n$$

כאשר הפונקציות $C_i(x)$ ניתן לקבל מהמערכת:

$$\begin{aligned}
C'_1y_1 +\dots+C'_ny_n &= 0\\
C'_1y'_1 +\dots+C'_ny'_n &= 0\\
&\dots\\
C'_1y_1^{(n-2)} +\dots+C'_ny_n^{(n-2)} &= 0\\
a_0\left(C'_1y_1^{(n-1)} +\dots+C'_ny_n^{(n-1)}\right) &= f(x)
\end{aligned}$$

המשוואה.

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1} +\dots+a_{n-1}x + a_ny = f(x)$$

נקראת <u>משוואת אוילר</u>. המשוואה הופכת למשוואה דיפרנציאלית לינארית עם מקדמים קבועים ע"י ההחלפה:

$x = e^t$ כאשר $x > 0$ ו $x = -e^t$ כאשר $x < 0$

עבור המשוואה הנתקבלת, המשוואה האופינית תהיה בצורה

$$a_0\lambda\left(\lambda- 1\right)\left(\lambda- 2\right) \dots\left(\lambda- n + 1\right) +\dots a_{(n-2)}\lambda\left(\lambda- 1\right) + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

בבנית המשוואה במקום כל מכפלה $x^k y^{(k)}$ בצורה כללית של המשוואת אוילר תהיה המכפלה: $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-k+1)$

פתור:

251. $y'' - 2y' + y = e^x / x$

252. $y'' + 3y' + 2y = 1 / (e^x + 1)$

253. $y'' + v = 1 / \sin x$

254. $y'' + 4y = 2\tan x$

255. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+2}$

256. $y'' + y = 2\sec^3 x$

257. $y'' + 2y' + y = xe^x + e^{-x} / x$

258. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\left(\cos^2 x + \tan x\right)$

*259. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x \cos 2x$

260. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$

*261. $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\sin^2 x$

*262. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}\cos^2 x$

263. $y^{(5)} + 4y' = x + 1 + \cos 2x$

פתור משוואת אוילר:

264. $x^2y'' - xy' + y = \ln x / x + x / \ln x$

265. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$

266. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

267. $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$

268. $x^3y''' + xy' - y = 0$

269. $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x$

270. $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$

!! בתרגילים המסומנים בכוכבית (*) נא לתת רק צורה כללית של הפיתרון. אין צורך בחיפוש ערכים מספרים של המקדמים.

9 § משוואות דיפרנציאליות ליניאריות עם מקדמים משתנים

~~אינה קיימת שיטה כללית לפתירת משוואות דיפרנציאליות עם~~

מקדמים משתנים. אם ידוע אחד מפתרונות y_1 של המשוואה עם מקדמים משתנים, ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבות: $y = y_1 z$

ו $z' = u$

לקבלת פתרון כללי למשוואה מסדר שני

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

עם פתרון אחד y_1 ידוע, להורדת הסדר אפשר להשתמש גם בשיטה הנ"ל או בנוסחת אוסטרוגרדסקי - ליאוביל:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int\left(\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\right)dx}$$

כאן y_1 ו y_2 פתרונות כלשהם של המשוואה המקורית.

התר את המשוואות הבאות כאשר נתון אחד או יותר מפתרונותיה

.271 $\left(x^2 + 1\right)y'' - 2xy' + 2y = 0\,;\; y_1 = x$

.272 $x^2(x + 1)y'' - 2y = 0\,;\; y_1 = 1 + \frac{1}{x}$

.273 $xy'' + 2y' - xy = 0\,;\; y_1 = \frac{e^x}{x}$

.274 $y'' - 2\left(1 + \tan^2 x\right)y = 0\,;\; y_1 = \tan x$

.275 $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 3x^{3/2}\sin x,\; x > 0\,;\quad y_1 = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

.276 $y'' - y' \tan x + 2y = 0 \; ; \; y_1 = \sin x$

.277 $xy''' - y'' - xy' + y = 0 \; ; \; y_1 = x ; \; y_2 = e^x$

.278 $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0 \; ; \; y_1 = x \; ; \; y_2 = \frac{1}{x}$

.279 $\left(x^2 - 2x + 3\right)y''' - \left(x^2 + 1\right)y'' + 2xy' - 2y = 0 \; ; \; y_1 = x \; ; \; y_2 = e^x$

.280 $xy'' - y' + 4x^3y = 0 \; ; \; y_1 = \sin x^2 \; (x > 0)$

.281 $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \; ; \; y = \frac{\sin x}{x}$

.282 $y'' \sin^2 x - 2y = 0 \; ; \; y_1 = \cot x$

.283 $\left(1 - 2x^2\right)y'' + 2y' + 4y = 0 \; ; y_1 = x^2 - x$

.284 נתונה המשוואה $x^2y'' - 3xy' - 5y = x^2 \ln x$

עבור $x > 0$ וידוע ש $y_1 = \frac{1}{x}$ -הינה פתרון של המשוואה ההומוגנית

א) פתור את המשוואה ההומוגנית ע"י הורדת הסדר

ב)פתור את המשוואה הלא-הומוגנית בשיטת הוריאציאה

.285פתור בעית קושי:

$$x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3 \; ; y\big|_{x=1} = \frac{1}{8} \; ; \; y'\big|_{x=1} = \frac{3}{8}$$

התמרת לפלס §10

המשוואה

$$a_1 y^{(n)} + a_2 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_n - 1y = f(x)$$

כאשר $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ - קבועים

ניתן להפוך למשוואה אלגברית שכוללת גם תנאי התחלה ע"י <u>התמרת לפלס.</u> התמרת לפלס של פונקציה $f(t)$ מוגדרת בצורה האינטגרלית.

$$L\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

כאן s - פרמטר (ממשי או מרוכב). האינטגרל צריך להיות קיים כאשר $t \to \infty$. זה מטיל הגבלות מסוימות על חלק ממשי של s.

נחשב התמרת עבור הפונקציה $f(t) = e^{at}$

$$f\left\{e^{at}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)\,t}\,dt$$

$$= -\frac{1}{s-a}\left(e^{-(s-a)\,t}\right)\Big|_0^\infty = -\frac{1}{s-a}(0-1) = \frac{1}{s-a}$$

מכאן ברור ש $e^{-(s-a)\,t} \to 0$ כאשר $t \to \infty$ ולכן $s > a$

ניתן לכתוב

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$F(s)$ נקראת <u>התמרת לפלס.</u>

התמרות לפלס לפונקציות בססיות נתונות בטבלה מס'3. פתרון סופי למשוואה דיפרנציאלית ניתן לקבל ממשוואה אלגברית ע"י שימוש בהתמרה הפוכה L^{-1}

להתמרת לפלס נכונות התכונות:

א) $$L\left[kf(x)\right] = kF(s)$$

~~הוכחה של התכונה נובעת מהגדרה של התמרת לפלס.~~

$$L\left\{\left(kf(t)\right)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}kf(t)dt = k\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = kF(s)$$

ב) אם נתונות שתי הפונקציות

$$L\left\{f(t)\right\} = F(s) \text{ ו } L\left\{g(t)\right\} = G(s)$$

יהיה $$L\left\{f(t) \pm g(t)\right\} = F(s) \pm G(s)$$

כתוב התמרת לפלס לכל אחת הפונקציות הבאות:

.286 $f(t) = t^2 - 2 + e^{-t} - \sin 3t$

.287 $f(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - 2\cosh 2t$

.288 $f(t) = 3e^{0.5t}t^3$

.289 $f(t) = 5e^{-2t}\cos \pi t$

.290 $f(t) = \frac{t}{2}e^{-t}\sin 3t$

.291 $f(t) = e^{\alpha t}\cos \beta t$

כתוב התמרות הפוכות עבור ה-$F(s)$ הנתונות.

.292 $F(s) = \frac{s+2}{s^2+9}$

.293 $F(s) = \frac{1}{s\left(s^2+4\right)}$

.294 $F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$

.295 $F(s) = \frac{3}{2s-1}$

.296 $F(s) = \frac{5}{(s+2)^2+9}$

.297 $F(s) = \frac{8s+10}{(s+2)^2\left(s^2+2s+2\right)}$

פונקצית מדרגה H של *Heaviside*

<u>פונקציה H</u> מוגדרת בצורה: $u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

<u>תכונות של פונקציה H</u>:

1. $u(t) = 1 \ [t > 0]$
2. $u(-s) = 1 - u(t)$
3. $u(T-t) = u\left(-(t-T)\right) = 1 - u(t-T)$
4. $u(at-T) = u\left(t - T / a\right)$

הפונקציה H עם הזזה ב T יחידות: $u(t-T) = \begin{cases} 0 & t < T \\ 1 & t \geq T \end{cases}$

התמרת לפלס עבור $u(t-T)$:

$$L\left\{u(t-T)\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t-T) dt = \frac{e^{-sT}}{s}$$

להתמרת לפלס של פונקציות עם הזזה (לא רק לפונקציאת H) יש שתי

תכונות חשובות:

1. $L\left\{f(t-T)u(t-T)\right\} = e^{-sT} F(s)$
2. $L\left\{f(t)u(t-T)\right\} = e^{-sT} L f(t+T)$

כתוב התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

.298 $f(t) = \begin{cases} 5 & a \leq t < b \\ 0 & else \end{cases}$

.299 $f(t) = \begin{cases} t-1 & 1 \leq t \leq 3 \\ 8-2t & 3 \leq t < 4 \end{cases}$

.300 $L\left\{ (t-2)u(t-2) \right\}$

.301 $L\left\{\sin\ (t-2)u(t-2)\right\}$

.302 $L\left\{ \sin t \ u(t-\pi)\right\}$

.303 $f(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t < 4 \\ 4 & t \geq 4 \end{cases}$

צייר גרף וכתוב התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

.304 $f(t) = u(t-1) + 3u(t-5)$

.305 $f(t) = \begin{cases} 2 & 1 \leq t < 3 \\ 1 & t \geq 3 \end{cases}$

רשימת נוסחות הקשורות עם פונקצית דלתה δ (הלם)

1. $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)dt = 1$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt = f(0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$

3. $$\delta(t) = \frac{d}{dt}\left(u(t)\right)$$

זה אומר שפונקצית דלתה הינה נגזרת של פונקצית מדרגה.
התמרת לפלס של פונקציה דלתה:

4. $$L\left\{\delta(t)\right\} = L\left\{\frac{d}{dt}u(t)\right\} = s\,Lu(t) = s\frac{1}{s} = 1$$

$$L\left\{\delta(t-a)\right\} = e^{-as}L\left\{\delta(t)\right\} = e^{-as}$$

כתוב התמרת לפלס לפונקציות הבאות:

.306 $f(t) = A\delta(t)\ ;A = Const$ .307 $f(t) = \cos t\,\delta\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$

.308 $f(t) = F_0\delta(t-3)\ ;\ F_0 = Const$

פתור;

.309
$$y'' + 3y' + 2y = f(x)$$
$$y|_{t=0} = 4\ ;\ y'|_{t=0} = 0$$

כאשר $f(t)$ הינה אימפולס בגובה 5, שנתון בזמן $t = 2$

.310
$$y'' + 16y = P_0\,\delta(t)$$
$$y|_{t=0} = 1\ ;y'|_{t=0} = -0$$
$$P_0 = Const$$

.311 $y'' + 9y = \delta(t)$, $y|_{t=0} = 0 \; ; \; y'|_{t=0} = 2$

.312 $y'' + y = \delta(t-1)$, $y|_{t=0} = 1 \; ; \; y'|_{t=0} = 0$

.313 $Rq' + \frac{q}{C} = E_0 + E_1\delta(t-1)$

$R`C`E_0`E_1 = Const \; ; q|_{t=0} = 0$

פונקציה מחזורית

אם$f(t)$ הינה <u>פונקציה מחזורית</u> ומחזורה שווה ל T כך ש $f(t+T) = f(t)$
התמרת לפלס של הפונקציה תהיה בצורה:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \int_0^{T} e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t) + \cdots =$$

$$\int_0^{T} e^{-st} f(t)dt + e^{-sT}\int_0^{T} e^{-st} f(t)dt + e^{-2sT}\int_0^{T} \cdots = \left[1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots\right]\int_0^{T} e^{-st} f(t)dt$$

כיוון שבסוגריים מרובעות ישנה סדרה הנדסית אינסופית, סכומה שווה ל $\frac{1}{\left(1-e^{-st}\right)}$ לכן מקבלים:

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^{T} e^{-st} f(t)dt$$

כתוב התמרת לפלס לפונקציות הבאות:

.314 $f(t) = \begin{cases} E & 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -E & \frac{T}{2} \le t < T \\ T & \text{מחזור} \end{cases}$

.315 $f(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \le t < \pi \\ 0 & \pi \le t < 2\pi \\ 2\pi- & \text{מחזור} \end{cases}$

.316 $f(t) = \begin{cases} t & 0 \le t < 1 \\ 0 & 1 \le t < 2 \\ 2 & \text{מחזור} \end{cases}$

.317 $f(t) = kt \; ; 0 < t \le T$, T מחזור

פתור את המשוואות הבאות תוך שימוש בהתמרת לפלס:

.318 $y'' - 3y' + 2y = 2e^{-4t}; \; y|_{t=0} = 0 \; ; \; y'|_{t=0} = 1$

.319 $y'' - y' - 2y = 5e^{2t} \; ; \; y|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0$

.320 $2y'' + 5y' - 3y = t - 4 \; ; \; y|_{t=0} = 0 \; ; \; y'|_{t=0} = 2$

.321 $y'' + y = \cos t \; ; \; y|_{t=0} = 0 \; ; \; y'|_{t=0} = -1$

.322 $y'' + y' - 2y = 5e^{-x}\sin 2x \; ; \; y|_{x=0} = 1 \; ; \; y'|_{x=0} = 0$

.323 $y^{(4)}-k^4y=0\ ;k=Const\ ;y|_{t=0}=1\ ;y'|_{t=0}=y''|_{t=0}=y'''|_{t=0}=0$

.324 $y'+3y=f(t)\ ;\ y|_{t=0}=1$

כאשר:

$$f(t)=\begin{cases}0 & t<1\\ 2 & 1\le t<2\\ 0 & t\ge 2\end{cases}$$

.325 $y''+4y=f(t)\ ;\ y|_{t=0}=0;\ y'|_{t=0}=3$

כאשר:

$$f(t)=\begin{cases}\cos 2t & 0\le t<\pi\\ 0 & t\ge\pi\end{cases}$$

.326 $y''-4y'+4y=6xe^{2x}\ ;y|_{t=0}=y'|_{t=0}=1$

.327 $y''+2y'+y=\sin t\ ;\ y|_{t=0}=3;\ y'|_{t=0}=1$

.328 $\begin{cases}y''+y=f(t)\\ y(0)=0\\ y'(0)=0\end{cases}$ $\quad f(t)=\begin{cases}t^2 & \text{if } 0\le t\le 1\\ 2-t & \text{if } 1\le t\le 2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$

.329 $y''+4y'+5y=3e^{-2x}\ ;\ y|_{x=0}=4;\ y'|_{x=0}=-7$

.330 $y''+5y'+6y=10e^{-2x}\sin 2x\ ;\ y|_{x=0}=0;\ y'|_{x=0}=-3$

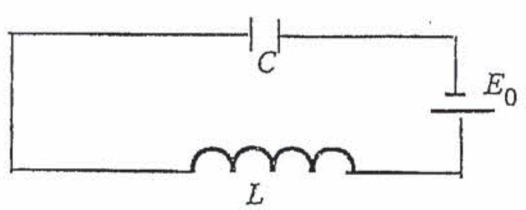
.331 $4y''+9y=\sin 2t\ ;\ y|_{t=0}=0;\ y'|_{t=0}=\frac{1}{2}$

.332 $y''+2y'+y=f(t)\ ;\ y|_{t=0}=1\ ;\ y'|_{t=0}=0$

כאשר:

$$f(t)=\begin{cases}2\sin t & t\in[0;\pi]\\ 0 & t\notin[0;\pi]\end{cases}$$

.333 סוללה בעלת מתח קבוע E_0 מחוברת לסליל בעל השראות L ולקבל בעל קיבולת C בחיבור טורי. אם הזרם והמטען התחלתי של הקבל שווים לאפס, מצא ביטוי עבור המתח.



קונבולוציה

נניח שיש לנו שתי פונקציות $g(t)$ ו $f(t)$ מוגדרות ורציפות עבור $t > 0$
אפשר להגדיר את הקונבולוציה של הפונקציות $f(t)$ ו $g(t)$ בצורה:

$$f * g = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad 0 \le t < \infty$$

והיא גם פונקציה חדשה של t. ומוגדרת עבור t חיוביים
תכונות של קונבולוציה הן:

1. $f * g = g * f$
2. $f * cg = (cf) * g = c(f * g) \quad c = Const$
3. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$
4. $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$
5. $\delta(t) * f = f * \delta(t) = f \quad ,\delta(t-a) * f = f(t-a) \,, a > 0$

להתמרת לפלס של קונבולוציה יש צורה:

$$L\{f(t) * g(t)\} = L\{f(t)\}L\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

מצא את $f * g$ ה והתמרת לפלס של **קונבולוציה** עבור הפונקציות הבאות:

.334 $f(t) = e^t, \quad g(t) = t^2$

.335 $f(t)\sin t\,, \quad g(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 3 \\ 2 & t \ge 3 \end{cases}$

.336 $f(t) = 5, \quad g(t) = 2t\,,$ $\quad t \ge 0$

.337 $f(t) = t-1, \quad g(t) = 3t^2,$ $\quad t \ge 0$

.338 $f(t) = \cos t, \quad g(t) = \sin 3t,$ $\quad t \ge 0$

.339 $f(t) = e^{-t}, \quad g(t) = t+2$ $\quad t \ge 0$

.340 $f(t) = \begin{cases} t & 0 < t \le 1 \\ 0 & t > 1 \\ t \ge 0 \end{cases}, \quad g(t) = e^{-t}$

.341 $f(t) = \begin{cases} 4 & 0 < t \le 2 \\ 0 & t > 2 \\ t \ge 0 \end{cases}, \quad g(t) = \sin 2t$

מצא התמרת לפלס הפוכה לפונקציות הבאות בתור קונבולוציה

.342 $L\{f * g\} = \dfrac{3}{(s+3)(s+1)}$

.343 $L\{f * g\} = \dfrac{5s}{(s^2+9)(s-4)}$

$$L\{f * g\} = \frac{e^{-3s}}{s\left(s^2 + 16\right)} \quad .344$$

$$L\{f * g\} = \frac{e^{-2s}}{s + 3} \quad .345$$

$$L\{f * g\} = \left(\frac{2e^{-s}}{s} - \frac{3e^{-2s}}{s}\right)\frac{s}{s^2 + 9} \quad .346$$

חשב :

$\delta(t) * \cos 4t$ .347

$\delta(t-2) * e^{-2t}u(t)$ .348

פתור את המשוואות דיפרנציאליות הבאות וכתוב פתרון בצורת קונולוציה (צורה אינטגרלית)

.349
$$y'' + 2ay' + a^2y = f(t)$$
$$y|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0$$
$f(t)$ -פונקציה של t

.350
$$I'' + (a+b)I' + abI = f(t)$$
$$I|_{t=0} = I'|_{t=0} = 0$$
$$a, b = Const$$

.351
$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+t}$$
$$y|_{t=0} = 0;\ y'|_{t=0} = 2$$

.352
$$\Theta'' = -K^2\left(\Theta - \zeta(t)\right)$$
$$\Theta|_{t=0} = \Theta'|_{t=0} = 0$$
$$K = Const$$
$\zeta(t)$ -פונקציה של t

§11 מערכות של משוואות דיפרנציאליות לינאריות עם מקדמים קבועים

מערכת משוואות הינה בצורה:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots a_{nn}x_n \\ x_i' = \dfrac{dx_i}{dt} \quad \text{כאשר} \end{cases} \qquad (1)$$

לפתירת המערכת ניתן להשתמש בשיטות הבאות:

1.ממערכת של n משוואות מסדר ראשון אפשר לעבור למשוואה יחידה מסדר n. השיטה מתאימה למערכות שאינם מסובכות.

דוגמה 1.

פתור את המערכת
$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = 2e^t - x \end{cases}$$

נבטל את המשתנה y .לכן נקבל מהמשוואה הראשונה $y = x' - 1$

הצבה למשוואה השניה תתן $x'' = 2e^t - x$. המשוואה - הינה מסדר שני עם מקדמים קבועים. ע"י בנית המשוואה האופינית, מקבלים שפתרון למשווה הומוגנית יהיה $x_h = C_1\cos t + C_2\sin t$ ו $s = 0$ ופתרון למשוואה לא-הומוגנית נחפש בצורה $x_p = Ae^t$. קיבלנו: $x = x_h + x_p = C_1\cos t + C_2\sin t + e^t$ מכאן

$$y = x' - 1 = -C_1\sin t + C_2\cos t + e^t - 1$$

2. נכתוב את המערכת (1) בצורה וקטורית $x' = Ax$ כאן x - וקטור A -מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_11 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

נחפש את השורשים של המשוואה האופינית .

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

לכל שורש λ_i פשוט של המשוואה האופינית מתאים פתרון $C_i v^i e^{\lambda_i t}$ כאן C_i קבוע, v^i - וקטור עצמי של המטריצה A, שמתאים ל λ_i .

אם מספר של וקטורים עצמים שבילתי-תלוים לינארית $v^k \cdots v^1$ של השורש המרובה λ שווה לריבוי שלו , לוקטור הזה מתאים הפתרון:

$$C_1 v^1 e^{\lambda t} + \cdots C_k v^k e^{\lambda t}$$

אם עבור שורש λ שריביו שווה ל k יש רק מספר m של ערכים עצמיים, שבילתי-תלוים לינארית $m < k$, פתרון שמתאים ל λ, מחפשים כמכפלה של פולינום מדרגה $(k-m)$ ב $e^{\lambda t}$, בצורה הבאה:

$$\begin{cases} x_1 = \left(a + bt + \cdots + dt^{k-m}\right)e^{\lambda t} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \left(p + qt + \cdots + st^{k-m}\right)e^{\lambda t} \end{cases} \qquad (3)$$

לשם לחשב את המקדמים $a,b,\cdots,s$ מציבים את הפתרון של (3) למערכת (2). כתוצאה מהשוות מקדמים מקבלים מערכת של משוואות אלגבריות לינאריות לפי $a,b,\cdots,s$. צריכים לחפס את הפתרון הכללי של המערכת. המקדמים $a,b,\cdots,s$ תלוים ב k קבועים (כאשר k -ריבוי של השורש λ

פתרון של מערכת (1) הינו סכום של הפתרנות עבור כל λ

דוגמה ב:

פתור את המערכת:

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = -2x - z \\ z' = 2x + y + 2z \end{cases} \qquad (4)$$

בונים ופותרים את המשוואה האופינית:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

לשורש פשוט $\lambda_1 = 2$ נקבל וקטור עצמי (α,β,γ) כפתרון של המערכת:

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

מקדמי המערכת שווים לאברים של דטרמיננטה (5) כאשר $\lambda = 2$. מ (6) מקבלים: $2\alpha = -\beta = \gamma$ זה אומר שוקטור (1,-2,2) - הינו וקטור עצמי ו

$$x = e^{2t}, \quad y = -2e^{2t}, \quad z = 2e^{2t} \qquad (7)$$

נותן פתרון פרטי למערכת (2).

עבור השורש הכפול $\lambda = 1$ נתחיל מחפוש מספרם של וקטורים עצמיים שבילתי-תלוים לינארית. כאשר $\lambda = 1$ מ(5) נקבל את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

סדרה של המטריצה $n = 3$, דרגתה $r = 2$. מספר של וקטורים עצמים שבילתי-תלוים לינארית שווה: $m = n - r = 1$. רבויו של שורש $\lambda = 1$ שווה. $k = 2$ מפני ש $k > m$, פתרון נכפס בצורת המכפלה של פולינום מדרגה $k - m = 1$ ב־ $e^{\lambda t}$, וצורתו:

$$x = (a + bt)e^t, \quad y = (c + dt)e^t, \quad z = (f + gt)e^t \qquad (8)$$

לשם קבלת המקדמים a,b,c,d,f,g נציב את ה(8) למערכת (4) ונשווה את המקדמים. נקבל:

$$\begin{aligned} b+d+g &= 0, & b &= a+c+f,\\ -2b-d-g &= 0, & d &= -2a-c-f, \\ 2b+d+g &= 0, & g &= 2a+c+f \end{aligned} \qquad (9)$$

נכתוב את פתרון הפרטי עבור המערכת. משתי משוואות השמאליות מקבלים $b=0,\ g=-d$. מציבים את הערכים למשוואות שנשארו:

$$0 = a+c+f, \quad d = -2a-c-f \qquad (10)$$

ומ (10): $a=-d, \quad f=d-c$

לכל המשתנים יש לנו ביטוי לפי d ו c. מניחים: $c=C_1,\ d=C_2$ לכן $a=-C_2$,
$b=0 \quad f=C_2-C_1, \quad g=-C_2$, שנותן פתרון כללי ל (9).

נציב את הערכים a,b,c,d,f,g ל(8) ונוסיף את פתרון הפרטי (7), מוכפל ב C_3 נכתוב את הפטרון הכללי עבור (4):

$$x=-C_2e^t+C_3e^{2t}, \quad y=\left(C_1+C_2t\right)e^t-2C_3e^{2t},$$
$$z=\left(C_2-C_1-C_2t\right)e^t+2C_3e^{2t}$$

3. פתרון למערכת (1) ניתן לקבל בדרך אחרת. לכל מטריצה קיים בסיס שבו למטריצה יש צורת ג'ורדן. לכל תא מסדר $p \geq 1$ של צורת ג'ורדן קיימת סדרה $h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,\ldots,h_p$ של וקטורי הבסיס שמתאימים למערכת:

$$\begin{aligned} Ah_1 &= \lambda h_1, \quad h1 \neq 0,\\ Ah_2 &= \lambda h_2+h_1,\\ Ah_3 &= \lambda h_3+h_2,\\ &\cdots\cdots\cdots \\ Ah_p &= \lambda h_p+h_{p-1} \end{aligned} \qquad (11)$$

~~לכל סידרה $h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,\ldots,h_p$ מתאימים פתרונות בילתי-תלוים $x^1,x^2,x^3,x^4,x^5,\ldots,x^p$~~ של המערכת $x'=Ax$ (אינדקס עליון נותן מספר של פתרון):

$$\begin{aligned} x^1 &= e^{\lambda t}h_1,\\ x^2 &= e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1+h_2\right),\\ x_3 &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_1+\frac{t}{1!}h_2+h_3\right),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ x^p &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h_1+\frac{t^{p-2}}{(p-2)!}h_2+\cdots+\frac{t}{1!}h_{p-1}+h_p\right) \end{aligned} \qquad (12)$$

מספר של הפתרנות שווה לסדר של מטריצה. הפתרונות ,וצרים מערכת בסיסית של פתרנות.

4.במקרה של שורשים מרוכבים λ, כל השיטות נתנות פתרון ע"י פונקציות מרוכבות. אם מקדמים של (1) הינם ממשים ,אפשר לבטא את הפתרון בפונקציות ממשיות. לשם זה נשתמש בעובדה, שחלק הממשי וחלק המדומה שמתאמים

לשורש $(\beta \neq 0)$ $\lambda = \alpha + i\beta$ הן פתרנות בילתי-תלויות לינארי.

דוגמה 4:

פתור את המערכת:
$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}$$

בונים ופותרים את המשוואה האופינית

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0, \ \lambda = 3 \pm 2i$$

עבור השורש $\lambda = 3 \pm 2i$ נחפש וקטור עצמי (a,b)

$$\begin{cases} (1-2i)a - \quad b = 0 \\ 5a - (1+2i)b = 0 \end{cases}$$

נקח $b = 1 - 2i$ $a = 1,$ עתה נקבל פתרון פרטי

$$x = e^{(3+2i)t}, \quad y = (1-2i)e^{(3+2i)t}$$

כוון שלמערכת מקדמים הינם ממשים, הפתרון המתאים לשורש $\lambda = 3 - 2i$ יהיה צמוד קומפלקסי לפתרון שמצאנו: לשם לקבל שני פתרנות ממשים, לקחים את החלק הממשי והחלק המדומה של המספר המרוכב הנתקבל. לכן:

$$\begin{cases} x_1 = Re\, e^{(3+2i)t} = e^{3t}\cos 2t \\ y_1 = Re\,(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = Im\, e^{(3+2i)t} = e^{3t}\sin 2t \\ y_2 = Im\,(1-2i)\, e(3+2i)t = e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t) \end{cases}$$

מפתרנות שקיבלנו הפתון הכללי יהיה בצורה:

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1e^{3t}\cos 2t + C_2e^{3t}\sin 2t$$
$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t) + C_2e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t)$$

5. לפתירת המערכת:

$$\begin{cases} a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \cdots + a_{1n}x + b_{10}y^{(n)} + \cdots + b_{1n}y = 0 \\ a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \cdots + a_{2n}x + b_{20}y(n) + \cdots + b_{2n}y = 0 \end{cases}$$

שאינה מנורמלת, צריך לבנות את המשוואה האופינית

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

ולקבל את שורשיו. (להמשך לפי סאיף 2.)

השיטה מתאימה למערכות של שלוש ויותר משוואות.

6. אם נתונה מערכת לא הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$x_i' = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i = 1,2,3,4,5,\cdots n \qquad (13)$$

פתרון פרטי של המערכת אפשר לחפש ע'י שיטת הוריאציה אם הפונקציות $f_i(t)$ בנוית מסכומים והפרשים של הפונקציות: $b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m$, e^t, $\cos \beta t$, $\sin \beta t$

כאן עובדים אותם הכללים כמו במשוואות ליניאריות בודדות עם מקדמים קבועים (ראה § 8) עם השינוים הבאים:

אם $f_i(t) = P_{mi}(t)\, e^{\nu t}$ כאן $P_{mi}(t)$ - פולינום מדרגה , פתרון למערכת (13) כותבים בצורה:

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)\, e^{\nu t}, \quad i = 1,\ldots,n \qquad (14)$$

שבה $Q^i_{m+s}(t)$ -הינם פולינומים מדרגה $m+s$ ומקדמיהם - נעלמים, $m = max\left(m_i\right)$ בוכרים $s = 0$ אם ν אינו שורש של המשוואה האופינית (2) ואם ν הינו שורש של (2) , s בפתרון יהיה שווה לריבוי של השורש (או , ליתר דיוק, s לוקחים גדול באחת מחזקה מקסימלית של הפולינומים שאותם מכפלים ב $e^{\nu t}$ בפתרון כללי של המערכת ההומוגנית). מקדמים נעלמים מגדירים ע"י הצבת ה(14) ל(13) והשוואת מקדמים.

באופן דומה מגדירים חזקות הפולינומים במקרה, פאשר $f_i(t)$ כולל $e^{at}\cos \beta t$ ו $e^{at}\sin \beta t$ ומספר $\nu = \alpha + i\beta$ הינו שורש של המשוואה האופינית.

דוגמה 6:

פתור את המערכת:

$$\begin{cases} x' = 4x - y + e^{3t}(t + \sin t) \\ y' = x + 2y + te^{3t}\cos t \end{cases} \qquad (15)$$

נתכיל ממערכת הומוגנית

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

עבורה השורשים $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$

בדרך של סאיף 3 מקבלים את הפתרון הכללי:

$$x_0 = \left(C_1 t + C_2\right)e^{3t}, \qquad y_0 = \left(C_1 t + C_2 - C_1\right)e^{3t}$$

במערכת (15) לפונקציות $t\,e^{3t}, e^{3t}\sin t, t\,e^{3t}\cos t$ מספרים $\alpha + i\beta$ שווים $3, 3+i, 3+i$ בהתאם. לכן צריך לחפס פתרנות למערכות הבאות:

$$\begin{cases} x' = 4x - y + te^{3t} \\ y' = x + 2y \end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases} x' = 4x - y + e^{3t}\sin t \\ y' = x + 2y + te^{3t}\cos t \end{cases} \qquad (17)$$

עבר (16) $\alpha + i\beta = 3 = \lambda_1 = \lambda_2;\ s = 2;\ m = 1$

לפי (14) פתרון פרטי ניתן לחפש בצורה:

$$x_1 = \left(at^3 + bt^2 + ct + d\right)e^{3t}, \qquad y_1 = x + 2y + te^{3t}\cos t.$$

עבור (17) $m = 1$ $s = 0,$ $\alpha + i\beta = 3 + i = \lambda_{1,2},$ פתרון פרטי יהיה בצורה

$$x_2 = (kt + l)\, e^{3t} \sin t + (mt + n) e^{3t} \cos t,$$
$$y_2 = (pt + q)\, e^{3t} \sin t + (rt + s) e^{3t} \cos t$$

כאשר נקבל המקדמים $a, b, c, d, f, g, \ldots$,פתרון כללי ל (15) נכתוב בצורה הבאה:

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad y = y_0 + y_1 + y_2$$

7. פתרון למערכת (13) ניתן לחפש בשיטת הוריאציה ,אם ידוע פתרון כללי למערכת הומוגנית עם אותם המקדמים $a_{ik}(t)$. לפתירת (13) - לא-הומוגנית בנוסחת פתרון כללי למערכת הומוגנית צריך להחליף קבועם C_i במשתנים $C_i(t)$. ביטוים שקיבלנו עבור x_i מציבים למערכת לא-הומוגנית וממנה מצאים $C_i(t)$

פתור

.353 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4 \end{cases}$

.354 $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - 4x \end{cases}$

.355 $\begin{cases} x' + x - 8y = 0 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$

.356 $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3y - 2x \end{cases}$

.357 $\begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$

.358 $\begin{cases} x' + x + 5y = 0 \\ y' - x - y = 0 \end{cases}$

.359 $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 4y - x \end{cases}$

.360 $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

.361 $\begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = y - 2x \end{cases}$

.362 $\begin{cases} x' - 5x - 3y = 0 \\ y' + 3x + y = 0 \end{cases}$

.363 $\begin{cases} x' = x + z - y \\ y' = x + y - z \\ z' = 2x - y \end{cases}$

.364 $\begin{cases} x' = x - 2y - z \\ y' = y - x + z \\ z' = x - z \end{cases}$

.365 $\begin{cases} x' = 2x - y + z \\ z' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$

.366 $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$

.367
$$\begin{cases} x' = 4y - 2z - 3x \\ y' = z + x \\ z' = 6x - 5y + 5z \end{cases}$$

.368
$$\begin{cases} x' = x - y - z \\ y' = x + y \\ z' = 3x + z \end{cases}$$

.369
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 3y - z \\ z' = 2y + 3z - x \end{cases}$$

.370
$$\begin{cases} x' = 2x + 2z - y \\ y' = x + 2z \\ z' = y - 2x - z \end{cases}$$

.371
$$\begin{cases} x' = 4x - y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}$$

.372
$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 3x - 2y - 3z \\ z' = 2z - x + y \end{cases}$$

.373
$$\begin{cases} x'' - 2x + 6y = \frac{3}{2}\sin 2t \\ y'' + x - y = 0 \\ x|_{t=0} = y|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0, x'|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

.374
$$\begin{cases} x' - x - 5y = 1 \\ y' + 2x + y = e^t \\ x|_{t=0} = y|_{t=0} = x'|_{t=0} = y'|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

.375
$$\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 - \quad x_3 + 12 \end{cases}$$

.376
$$\begin{cases} x' = y - 2x - 2z \\ y' = x - 2y + 2z \\ z' = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$
$$(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1)$$

.377
$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3 + x \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases}$$

.378
$$\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = 2z - y \end{cases}$$

.379
$$\begin{cases} x' = y - 2z - x \\ y' = 4x + y \\ z' = 2x + y - z \end{cases}$$

.380
$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2y + 4z \\ z' = x - z \end{cases}$$

.381
$$\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = 2x - y - 2z \\ z' = 2z - x + y \end{cases}$$

.382
$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x + y - z \\ z' = x + z \end{cases}$$

.383
$$\begin{cases} x'' = 2x - 3y \\ y'' = x - 2y \end{cases}$$

.384
$$\begin{cases} x'' = 3x + 4y \\ y'' = -x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = 2y \\ y'' = -2x \end{cases} \quad .385$$

$$\begin{cases} x' = y + 2e^t \\ y' = x + t^2 \end{cases} \quad .386$$

$$\begin{cases} x' = y - 5\cos t \\ y' = 2x + y \end{cases} \quad .387$$

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ y' = x + 2y \end{cases} \quad .388$$

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \quad .389$$

$$\begin{cases} x' = 4x + y - e^{2t} \\ y' = y - 2x \end{cases} \quad .390$$

$$\begin{cases} x = 2y - x + 1 \\ y' = 3y - 2x \end{cases} \quad .391$$

$$\begin{cases} x' = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ y' = x + y + 5e^{-t} \end{cases} \quad .392$$

$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t \\ y' = -3x + 2t \end{cases} \quad .393$$

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = x - 2\sin x \end{cases} \quad .394$$

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y \\ y' = x - 3y + 3e^t \end{cases} \quad .395$$

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = y - 2x + 18t \end{cases} \quad .396$$

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 16te^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases} \quad .397$$

$$\begin{cases} x' = 2x + 4y - 8 \\ y' = 3x + 6y \end{cases} \quad .398$$

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y \\ y' = x - 2y + 2\sin t \end{cases} \quad .399$$

$$\begin{cases} x' = x - y + 2\sin t \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad .400$$

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2e^t \end{cases} \quad .401$$

$$\begin{cases} x' = y + \tan^2 t - 1 \\ y' = -x + \tan t \end{cases} \quad .402$$

$$\begin{cases} x' = x - y + \dfrac{1}{\cos t} \\ y' = 2x - y \end{cases} \quad .403$$

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y + 15e^t\sqrt{t} \end{cases} \quad .404$$

$$x' = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad .405$$

$$x' = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad .406$$

$$x' = Ax,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad .407$$

$$\begin{cases} y' - z = \cos t \\ z' + y = 1 \end{cases} \quad .408$$

12 § פתרון משוואות דיפרנציאליות בעזרת טורים

נתונה המשוואה:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (1)$$

כאשר כל המקדמים $P(x), Q(x), R(x)$ הן פונקציות אנליטיות בעגול משותף $|x-x_0| < \rho$

אזי קיים פתרון אחד ויחיד של המשוואה אנליטי ב $|x-x_0| < \rho$ ומקיים. שם את תנאי התחלה. נקודה x_0 נקראת נקודה רגולרית של המשוואה (1) אם $P(x_0) \neq 0$. בסביבה של הנקודה x_0 אפשר להציג (1) בצורה

$$y'' + \frac{Q(x)}{P(x)}y' + \frac{R(x)}{P(x)}y = 0 \qquad (2)$$

נסמן $\frac{R(x)}{P(x)} = q(x)$ ו $\frac{Q(x)}{P(x)} = p(x)$. כאו $p(x), q(x)$ הן פונקציות רציפות בסביבת הנקודה x_0. כאשר $p(x), q(x)$ אינם קבועים ניתן לפתור (2) תוך שימוש בטורים ולחפש פתרון בצורה:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (3)$$

נתחיל מדוגמה פשוטה:

$$y'' + y = 0 \qquad (4)$$

נקודה $x_0 = 0$ היא נקודה רגולרית. פתרון לפי (3) יהיה:

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ לכן $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}$ ו $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k x^{k-2}$ (גזירה איבר-איבר)

נעשה הצבה: $k-2=m$ ונציב התוצאות ב (4) לפי כך נכתוב:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)\, a_{m+2} x^m + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0 \qquad (5)$$

לכן:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \Big((m+2)(m+1)\, a^{m+2} + a_m\Big) x^m = 0 \qquad (6)$$

$$(m+2)(m+1)\, a_{m+2} + a_m = 0 \qquad (7)$$

מ (7) נובעת נוסחה רקורסיבית:

$$a_{m+2} = \frac{-1}{(m+2)(m+1)}\, a_m \qquad (8)$$

עתה נוכל לחשב a_m עבור כל m. נעשה את זה עבור m זוגים ואי-זוגיים בניפרד.

$m = 0 \Leftarrow a_2 = \frac{-1}{2} a_0$, $\quad m = 2 \Leftarrow a_4 = \frac{-1}{3 \cdot 4} a_1 = \frac{1}{4!} a_0$, $\quad m = 4 \Leftarrow a_6 = \frac{-1}{6!} a_0$

$a_7 = \frac{-1}{7!} a_1 \Leftarrow m = 5, \quad a_5 = \frac{1}{5!} a_1 \Leftarrow m = 3, \quad a_3 = \frac{-1}{3} a_1 \Leftarrow m = 1$

אפשר לכתוב צורה כללית:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{(2k)!} a_0; \qquad a_{2k+1} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} a_1$$

מכאן פתרון כללי ל (4) ניתן לכתוב:

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \qquad (9)$$

אבל $\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$ הינו טור עבור $\cos x$ ו $\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$ -טור עבור $\sin x$

לכן הפתרון (9) יהיה בצורה: $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$

נתבונן בפתירת משוואות מסוימות ונתחיל מהגדרת סוגי המשוואות.

משוואה:

$$\left(1 - x^2\right)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \qquad (10)$$

נקראת <u>משוואת לז'נדר</u>.

נכתוב פתרון בעזרת טורים למשוואת לג'נדר.

$x = 0$ היא נקודה רגולרית. אפשר לפתח טור:

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, a_k x^{k-2}, \ (13) \quad y' = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k x^{k-1}, \ (12) \quad y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \ (11)$$

נסמן $k - 2 = k$ ונציב (11); (12), (13) ב (10):

$$\left(1 + x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k - 2x\sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k x^{k-1} + \alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\, a_{k+2} x^{k+2} - 2\sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k x^k + \alpha(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)\, a_k - 2k\, a_k + \alpha(\alpha+1)\, a_k\right]x^k = 0$$

$$(k+2)(k+1)\, a_{k+2} = \left[k(k-1) + 2k - \alpha(\alpha+1)\right]a_k$$

$$k(k-1) + 2k + \alpha(\alpha+1) = k^2 - k + 2k + \alpha^2 + \alpha = \left(k^2 - \alpha^2\right) + (k - \alpha)$$

$$a_{k+2} = \frac{\left(k^2 - \alpha^2\right) + (k - \alpha)}{(k+2)(k+1)} a^k$$

כוון ש $\cancel{k^2 - \alpha^2 = (k-\alpha)(k+\alpha)} \Rightarrow \left(k^2 - \alpha^2\right) + (k - \alpha) = (k - \alpha)(k + \alpha + 1)$

ואזי הנוסכה הרקורסיבית

$$a_{k+2} = \frac{(k-\alpha)(k+\alpha+1)}{(k+2)(k+1)} a^k$$

עבור k זוגי נקבל :

$k=0$
$$a_2 = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{2 \cdot 1} a_0$$

$k=2$
$$a_4 = \frac{(2-\alpha)(2+\alpha+1)}{4 \cdot 3} a_2 = \frac{\alpha(2-\alpha)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} a_0$$

$k=4$
$$a_6 = \frac{(4-\alpha)(4+\alpha+1)}{6 \cdot 5} a_4 = \frac{-\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+5)}{6!} a_0$$

עבור k אי-זוגי

$k=1$
$$a_3 = \frac{(1-\alpha)(1+\alpha+1)}{3 \cdot 2} a_1 = \frac{-(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} a_1$$

$k=3$
$$a_5 = \frac{(3-\alpha)(3+\alpha)}{5 \cdot 4} a_3 = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{5!} a_1$$

$k=5$
$$a_7 = \frac{(5-\alpha)(5+\alpha+1)}{7 \cdot 6} a_5 = \frac{-(\alpha-5)(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)\boxed{\alpha+4}}{7!} a_1$$

לכן פתרון ל(10) יהיה בצורה

$$y = a_0\left[1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 - \cdots\right] +$$
$$a_1\left[x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 + \cdots\right]$$

אם α הינו מספר טיבעי אנו נקבל באחד מטורים פתרון בצורת פולינום שצורותו תלויה בערך של α. דוגמאות של הפולינומים נתונים בטבלה

α	$P_n(x)$
0	$P_0(x) = 1$
1	$P_1(x) = x$
2	$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2$
3	$P_3(x) = \frac{5}{3}x^2 - x$

משוואה

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \qquad (14)$$

נקראת משוואת הרמיט

לפתירת המשוואה נוח להשתמש בטורים

ע"י הצבת הנוסחות (11),(12) ו-(13) ב-(14), נקבל את הנוסחה הרקורסיבית:

$$a_{k+2} = \frac{(2k-\lambda)a_k}{(k+2)(k+1)}$$

עבור מספרים זוגים:

$$a_{2n+2} = \frac{(-\lambda)(4-\lambda)\cdots(4n-\lambda)}{(2n+2)!}a_0$$

עבור מספרים איזוגים:

$$a_{2n-1} = \frac{(2-\lambda)(6-\lambda)\cdots(4n-2-\lambda)}{(2n+1)!}a_1$$

אם $\lambda = 2m$ ו-m - מספר זוגי בחלק זוגי של הפתרון (הטור הראשון) אנו מקבלים פולינומים עבור ערכיו שונים של m. כאשר m - איזוגי נקבל פולינום בחלק השני של הטור. פולינומים עבור m שונים נתונים בטבלה:

λ	P	m	
0	1	0	H_0
2	x	1	H_1
4	$1-2x^2$	2	H_2
6	$x-\frac{2}{3}x^3$	3	H_3

כאן P - פולינומי הרמיט.

פתור:

.409 $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = 0$

.410 $y'' - 2xy' + 6y = 0$

.411 $\left(1-x^2\right)y'' - 2xy' + 6y = 0$

פתור ע״י טור בסביבה $x_0 = 0$

.412 $xy'' + 2y' + xy = 0$

.413 $2x^2y'' + \left(3x - 2x^2\right)y' - \left(x+1\right)y = 0$

.414 $9xy'' - \left(x^2 - 2\right)y = 0$

.415 $x^2y'' - x^2y' + \left(x-2\right)y = 0$

.416 $x^2y'' + 2xy' - \left(x^2 + 2x + 2\right)y = 0$

.417 $xy'' - xy' - y = 0$

.418 $xy'' + y' - xy = 0$

.419 נתונה המשוואה $xy'' + \left(1-x\right)y' + \lambda y = 0$

א) סכום הטור $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ משמש פתרון למשואה. חשב את מקדמי הטור.

ב) חשב את הערך λ, אם ידוע כי אחד הפתרונות למשואה הוא פולינום ממעלה 4. חשב את הפולינום (הנח את מקדמו הבכיר להיות שווה 1). בדוק כי הוא אכן מקיים את המשואה.

---

§ 13 משוואות דיפרנציאליות שונות

.420 $(4xy-3)y'+y^2=1$

.421 $y'\sqrt{x}=\sqrt{y-x}+\sqrt{x}$

.422 $y'''-y'=-\cos x$

.423 $y''+y'^2-y=0;\ y'|_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ ;y|_{x=0}=1$

.424 הגדר את הוורנסקיאן $W(f,g)$ של הפונקציות f ו- g.
הוכח כי אם f ו- g הינן פתרונות של משוואה דיפרנציאלית ליניארית הומוגנית מסדר שני בקטע $[a,b]$ אזי הוורנסקיאן שלהן מתאפס זהותית בקטע או אינו מתאפס כלל.

.425 $xy'=2\sqrt{y}\cos x-2y$

.426 $y^2\left(y-xy'\right)=x^3y'$

.427 $(\cos x-x\sin x)ydx+\left(x\cos x-2y\right)dy=0$

.428 $y^{(4)}-y=\sin x+\cos x+xe^x$

.429 $y''+2y'+y=e^{-t}\left(1+u_1(t)\right)\ ;y|_{t=0}=y'|_{t=0}=0$

.430 $\begin{cases}x'+y'=-x+y+3\sqrt{3}\\ x'-y'=x+y-2t\sqrt{t}\end{cases}$

.431 $y^{(5)}-4y^{(4)}+y^{(3)}+10y''-4y'-8y=0$

.432 $y''-2y'+y-\dfrac{e^x}{\left(1+x^2\right)}=0$

.433 $\dfrac{xy'}{y}+2xy\ln x+1=0$

.434 $x^2-\ln x+6y-4xy'=0$

.435 $\left(x\cos(xy)\right)y'+\left(\tan x\sin(xy)\right)+y\cos(xy)=0$
חשב את הפתרון שעובר דרך הנקודה $\left(\frac{1}{\pi};\pi\right)$

.436 $\left(e^{x-y}\cos y+\cos x\right)dx+\left(\sin x-e^{x-y}\sin y\right)dy=0$
כאשר נתון תנאי התחלה $y|_{x=0}=\frac{\pi}{2}$

437. נתון פתרון למשוואה אי-הומוגנית.

$$y = x + C_1 e^x + C_2 x^2$$

שחזר את המשוואה.

$y'y'' = y^2 \; ; \; y|_{x=0} = 1 \; ; \; y'|_{x=0} = 1$ .438

פתור מס' 439 ומס' 440 תוך שימוש בטורים

$y'' + xy = 0$ .439

$y'' + xy' + y = 0$ .440

441. הוכח שאם $\psi(x)$ ו-$\varphi(x)$ הינן פתרונות של המשוואה

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0$$

אזי קיים קבוע "C" כך ש:

$$\varphi(x)\psi'(x) - \varphi'(x)\psi(x) = \frac{C}{p(x)}$$

$y^{(5)} + 2y = 0$ .442

$\left(2xe^y + y^4\right)y' = ye^y$ .443

$y^2y' = 4x + 3y - 2$ .444

$y^2y' + x^2\sin^3 x = y^3\cot x$ .445

$\left(2xy^2 - y\right)dx + \left(y^2 + x + y\right)dy = 0$ .446

$y\sin x + y'\cos x = 1$ .447

$y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$ .448

$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$ .449

$\left(y' - x\sqrt{y}\right)\left(x^2 - 1\right) = xy$ .450

$x' = Ax \; ; \; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \; ; \; x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .451

$y'' + y = f(t) \; , y|_{t=0} = 0 \; , \; y'|_{t=0} = 1$ .452

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 1, & 1 \le t < \infty \end{cases}$$

תשובות

1. $y = x\ln|C/x|$
2. $y = (x+C)e^{-x}$
3. $y = 1/x(C-\cos x)$
4. $y = C\sin x - 1$
5. $y = Cx^2 - 1/x$
6. $y = e^x\left(\ln|x| + x^2/2 + C\right)$
7. $y = \left(1+x^2\right)(x+C)$
8. $y = x^n\left(e^x + C\right)$
9. $y = (x+C)\tan x/2$
10. $y = Ce^{-x^2} + x^2 - 1$
11. $y = Ce^{-\cos x} - \cos x + 1$
12. $y = Cx^2 + x^4$
13. $y = (2x+1)\left(C + \ln|2x+1|\right) + 1$
14. $y = \sin x + C\cos x$
15. $y = e^x\left(\ln|x| + C\right);\ x = 0$
16. $y = \ln\frac{y}{C}$
17. $y = x(C + \sin x)$
18. $x = 2\ln(y) - y + 1 + Cy^2$
19. $y = Ce^{x^2} - x^2 - 1$
20. $y = C\ln^2 x - \ln|x|$
21. $xy = \left(x^3 + C\right)e^{-x}$
22. $x = y^2 + Cy;\ y = 0$
23. $x = e^y + Ce^{-y}$
24. $x = (C - \cos y)\sin y$
25. $x = Cy^3 + y^2;\ y = 0$
26. $(y-1)^2 x = y - \ln Cy;\ y = 0;\ y = 1$
27. $y\left(e^x + Ce^{2x}\right) = 1;\ y = 0$
28. $y(x+1)\left(\ln|x+1| + C\right) = 1;\ y = 0$
29. $y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x;\ y = 0$

30. $y^3 = Cx^3 - 3x^2$

31. $y^2 = Cx^2 - 2x; \; x = 0$

32. $y = x^4 \ln^2 Cx; \; y = 0$

33. $y^{-2} = x^4(2e^x + C); \; y = 0$

34. $y^2 = x^2 - 1 + C\sqrt{|x^2 - 1|}$

35. $x^2(C - \cos y) = y; \; y = 0$

36. $xy\left(C - \ln^2 y\right) = 1$

37. $x^2 = Ce^{2y} + 2y$

38. $y^2 = C(x+1)^2 - 2(x+1)$

39. $e^{-y} = Cx^2 + x$

40. $y = x + x / (x + C); \; y = x$

41. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{(Cx^5 - x)}; \quad y = \dfrac{2}{x}$

42. $y = 1/x + 1/\left(Cx^{2/3} + x\right); \; y = 1/x$

43. $\cos y = (x^2 - 1)\ln C|x^2 - 1|$

44. $y = x + 2 + \dfrac{4}{(Ce^{4x} - 1)}; \quad y = x \pm 2$

45. $y = e^x - 1/(x + C); \; y = e^x$

46. $y = 2\left(\sqrt{1 + x^2} - 1\right)$

47. $y = x^3 e^x$

48. $y = \sin x - \cos x$

49. $y = x^2(e^x - e)$

50. $y = x / \cos x$

51. $y^2 = \dfrac{e^{x^2}}{(2x+1)}$

52. $y = x^4(\ln\sqrt{x} + 1)^2$

53. $1 = y^3 \cos^3 x(1 - 3\tan x)$

54. $y = x^3 - 0.5x$

55. $x = y^2(1 + y)$

56. $\sqrt{y^2 - 1} = Ce^{-1/x}$

57. $y^2 = 2(e^{-x} + C)$

58. $y = Cx^2$

59. $y\sqrt{x^2 + 1} = C$

60. $y^2 = x - x^3 + C$

61. $Ce^y = xy$

62. $\arcsin y - \arcsin x = C$

63. $y = Cx^2 e^{2x}$

64. $\cos y = C\cos x$

65. $\left(1+e^{x}\right)\left(1+e^{y}\right)=C$

66. $y=\ln^{2}x/2+C$

67. $y=\left(\cos^{3}x\right)/3-\cos x+C$

68. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=C$

69. $Ce^{x^{2}/2}-1=y$

70. $y=C\sqrt{1+x^{2}}-1$

71. $y=Cx^{2}e^{-3/x}$

72. $y=2x^{2}-1$

73. $\cos^{2}y=\sec^{2}x-3$

74. $y=\sin x-1$

75. $y=-\sqrt{1-x^{2}}$

76. $2\sqrt{y}-2\sqrt{x}+x=2$

77. $3\left(y+1\right)=\sqrt{2x-1}$

78. $y=4\sqrt{|1-x^{2}|}$

79. $y=\cos x$

80. $y=x;\ y=2\pi-x$

81. $y=\left(x+1\right)/Ce^{x};\ x=-1$

82. $\sqrt{y^{2}+1}=\ln|x|+C;\ x=0$

83. $y=1/\left(\ln C\left(1-x^{2}\right)\right);\ y=0$

84. $2-C\cos x=y$

---

85. $y=\left(x-C\right)^{3};\ y=0$

86. $y\left(1-Cx\right)=1;\ y=0$

87. $y^{2}-2=Ce^{1/x}$

88. $\left(Ce^{-x^{2}}1\right)y=2;\ y=0$

89. $e^{-s}=1+Ce^{t}$

90. $z=-\log_{10}\left(C-10^{x}\right)$

91. $x^{2}+t^{2}-2t=C$

92. $x=y-2k\pi;\ \cot((y-x)/2)=y+C$

93. $2x+y-1=Ce^{x}$

94. $x+2y+2=Ce^{y}$

95. $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln\left(\sqrt{4x+2y-1}+2\right)=x+C$

96. $y=\arctan 2\left(C-1/x\right)$

97. $x^2+x^3y-y^3=C$

98. $3x^2y-y^3=C$

99. $x^2-3x^3y^2+y^4=C$

100. $xe^{-y}-y^2=C$

---

101. $4y\ln x+y^4=C$

102. $x+x^3/y^2+5/y=C$

103. $x^2+\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{3/2}=C$

104. $x-y^2\cos^2 x=C$

105. $x^3\left(1+\ln y\right)-y^2=C$

106. $x^2+1=2\left(C-2x\right)\sin y$

107. $0.5e^{2x}y^2+xe^{2x}=C$

108. $-y=x\left(4y+C\right)$

109. $\arctan\frac{x}{y}=C-x$

110. $\sqrt{1+x^2}-xy=C$

111. $x^3y^3/3-x^2/2=C$

112. $x^3y^6/3-x^4y^3=C$

113. $-1=2y^3/x+Cxy$

114. $x+2\ln|x|+1.5y^2-y/x=C$

115. $\frac{x}{y}+\sqrt{1+x^2}=C$

116. $-y^2=2x^2\left(y+C\right)$

---

117. $\ln|x|-\frac{1}{xy}=C$

118. $\left(2x^2y^2+4xy+y^4\right)e^{x^2}=C$

119. $x^2=-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{4}+Ce^{2y^2}$

120. $\frac{y^2}{2x^2}-y=C$

121. $(x^4+3)y\,dx-x\,dx=0$

122. $y\sin xy=C$

123. $\left(2x-y\right)^2=4x$

124. $\arcsin\frac{y^2}{|x^3|}=\ln Cx^3;\ |x^3|=y^2$

125. $e^{x/y}=Cx$

126. $y=x-\left(x/\ln|Cx|\right)$

127. $y^2=Cxe^{-x/y}$

128. $x=Ce^{-x^2/2y^2}$

129. $y=x\ln^2|C/x|$

130. $y^2=2x^2\ln|Cx|$

131. $y^2=x^2\ln|C/x|$

132. $y=x[Cx-\sqrt{(y/x)^2+1}]$

133. $y^3 = 3x^3\left(\ln|x| + 9\right)$

134. $y = -x\ln|x|$

135. $y = e^{(y-x)/x}$

136. $y^2 = xe^{(x-y)/x}$

137. $y = x/\left(1 - \ln|x|\right)$

138. $y = 2e^{(x-y)/x}$

139. $x + y = Cx^2;\ x = 0$

140. $\ln\left(x^2 + y^2\right) = C - 2\arctan\left(y/x\right)$

141. $x(y - x) = Cy;\ y = 0$

142. $x = \pm y\sqrt{\ln Cx};\ y = 0$

143. $y = Ce^{y/x}$

144. $y^2 - x^2 = Cy;\ y = 0$

145. $\sin\frac{y}{x} = Cx$

146. $y = -x\ln\ln Cx$

147. $\ln\frac{x+y}{x} = Cx$

148. $\ln Cx = \cot\left(0.5\ln\frac{y}{x}\right);\ y = xe^{2\pi k},\ k = 0, \pm1, \mp2 \cdots$

149. $x\ln Cx = 2\sqrt{xy};\ y = 0;\ x = 0$

150. $\arcsin\frac{y}{x} = \ln Cx\,\mathrm{sgn}\,x;\ x = \mp x$

151. $(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2;\ y = x + 1$

152. $2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$

153. $(y - x + 2)^2 + 2x = C$

154. $(y - x + 5)^5(x + 2y - 2) = C$

155. $(y + 2)^2 = C(x + y - 1);\ y = 1 - x$

156. $y + 2 = Ce^{-2\arctan\frac{y+2}{x-3}}$

157. $\ln\frac{y+x}{x+3} = 1 + \frac{C}{x+y}$

158. $\sin\frac{y-2x}{x+1} = C(x+1)$

159. $x^2 = \left(x^2 - y\right)\ln Cx;\ y = x^2$

160. $x = -y^2\ln Cx;\ y = 0$

161. $x^2y^4\ln Cx^2 = 0;\ y = 0;\ x = 0$

162. $y^2e^{-1/xy} = C;\ y = 0;\ x = 0$

163. $\left(2\sqrt{y} - x\right)\ln C\left(2\sqrt{y} - x\right) = x;\ 2\sqrt{y} = x$

164. $1 - xy = Cx^3(2 + xy);\ xy = -2$

165. $2\sqrt{\left(1/xy^2\right) - 1} = -\ln Cx;\ xy^2 = 1;\ y = 0$

166. $y = x\left(Ce^{-x} - 1\right)$

167. $(Cx+1)y = Cx - 1\ ;\ y = 1$

168. $y\left(x^2 - C\right) = x\ ;\ y = 0$

169. $y(x+C) = x + 1\ ;\ y = 0$

170. $x = Cy + y^3\ ;\ y = 0$

171. $y\ln Cx = -x\ ;\ y = 0$

172. $y^2 = C\left(x^2 - 1\right)\ ;\ x = \pm 1$

173. $x = Cy + \ln^2 y$

174. $y = Cx^2 e^{-3/x}$

175. $4x^2 y = (x + 2C)^2\ ;\ y = 0$

176. $x = Ce^y + y^2 + 2y + 2$

177. $y^2 = C(xy - 1)\ ;\ xy = 1$

178. $x + y = \tan\ (y - x)$

179. $x^3y^2 + 7x = C$

180. $y(xy - 1) = Cx$

181. $-e^{-y} = \ln C(x-2)$

182. $x = y^2\left(C - 2\ln |y|\right)\ ;\ y = 0$

183. $y^2\left(Ce^{x^2} + 1\right) = 1\ ;\ y = 0$

184. $y^2 = 2x\ln Cy\ ;\ y = 0$

185. $\ln\left(x^2 + y^2\right) + \arctan\left(y / x\right) = C$

186. $y^2 + \sqrt{x^4 + y^4} = C$

187. $y\left(\sqrt{|x^2 - 1|} - 2\right) = 1\ ;\ y = 0$

188. $y^2\left(Ce^{2x} + x + 0.5\right) = 1\ ;\ y = 0$

189. $y^2 - 1 = C(x+1)^4 e^{-4x}\left(y^2 + 1\right)\ ;\ x = -1$

190. $y\sin x - \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C$

191. $3y^2 = 2\sin x + C\sin^{-2} x$

192. $x\left(e^y + xy\right) = C$

193. $(x+1)y = x^2 + x\ln Cx$

194. $y = x\tan \ln C\ ;\ x = 0$

195. $y^{2/3} = Ce^{2x} + \left(x / 3\right) + \left(1 / 6\right)\ ;\ y = 0$

196. $x = Ce^{\sin y} - 2(1 + \sin y)$

197. $y^2 = \left(x^2 + C\right)e^{2x}$

198. $x\left(y^2 - 1\right)^2 = y^3 - 3y + C$

199. $\sqrt{y - x} - \sqrt{x} = C\ ;\ y = x$

200. $4\left(C_1 y - 1\right) = C_1^2\left(x + C_2\right)^2$

201. $y = C_2 e^{C_1 x}$

202. $y = C_2|x|^{C_1-\left(\frac{1}{2}\right)\ln|x|}$

203. $y = 2\tan\frac{x^2-1}{2}$

204. $C_1 = 0: y = -x + C_2\ ;\ C_1 \neq 0: y = e^{C_1x}\left(C_2 - \int e^{-C_1x}dx\right) = C_2e^{C_1x} + 1/C_1$

---

205. $y = x\left(C_1 + \arcsin\frac{C_2}{x}\right)$

206. $y = C_1x - C_1\ln|C_1+x| + C_2$

207. $C_1y^2 - 1 = \left(C_1x + C_2\right)^2$

208. $y = C_1\left(x - e^{-x}\right) + C_2$

209. $\ln y = C_1\tan\left(C_1x + C_2\right)\ ;\ \ln\left|\ln\left(y - C_1\right) / \left(\ln y + C_1\right)\right| = 2C_1x + C_2\ ;$
$\left(C - x\right)\ln y = 1\ ;\ y = C$

210. $\ln\tan\left(y/2 + \pi/6\right) = 2x + 2$

211. $y(x+2) = -x - 6$

212. $\ln C_2y = 4x^{5/2} + C_1x\ ;\ y = 0$

213. $y = C_2e^{C_1x^2}$

214. $y = C\ ;\ y = Ce^{-1/x}\ ;\ \ y = \left|\frac{x}{x+C_1}\right|^{1/C_1}$

215. $y = C_1x - C_1^3/3 - 5C_1\ ;\ y = \pm\frac{2}{3}(x-5)^{3/2}$

216. $y = \left(x/2 + C\right)^2 + 0.5$

217. $y = e^x + C_1x + \ln|x(x-1)| + C_2$

---

218. $C_1y = \left(C_1^2x^2 + 1\right)\arctan C_1x - C_1x + C_2$

219. $y = \frac{8}{5}\sqrt{\left(\frac{5}{4}y - 1\right)^3} + \frac{1}{5}$

220. $e^y\sin^2\left(C_1x + C_2\right) = 2C_1^2;\ e^y\sinh^2\left(C_1x + C_2\right) = 2C_1^2;$
$e^y|x + C|^2 = 2$

221. א) $y^2 = C_1x^3 + C_2$ ב) $y = C_1\cos(C_2x + C_3) + C_4$

222. $y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$

223. $y^3 = C_1(x + C_2)^2;\quad y = C$

224. א) $C_1y = \pm\sin(C_1x + C_2);\ C_1y = \pm\sinh(C_1x + C_2);\ y = \pm x$

224. ב) $y = x^3$

225. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x}$

$y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$ .226

$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$ .227

$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$ .228

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 4(x-2)e^{x}$ .229

$y = C_1e^{-x} + C_2e3x + \frac{1}{5}e^{4x}$ .230

$y = -2e^{3t} + 4\cos t - 3\sin t$ .231

$y = C\,1e^{(1-\sqrt{2})x} + C_2e^{(1+\sqrt{2})x} - 3xe^{x}$ .233

$y = \left(\frac{4}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t\right)e^{t} + \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t$ .235

$y = e^{t}(7/5\sin t - 1/5\cos t) + 1/5e^{-t}$ .236

$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + xe^{x} + x^2 + 2$ .237

$y = C_1 + C_2e^{5x} - 0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x + 0.02(\cos 5x - \sin 5x)$ .238

$y(x) = C_1e^{4x}\cos 2x + C_2e^{4x}\sin 2x + \frac{3}{4}xe^{4x} - \frac{1}{17}(8\cos 2x + 2\sin 2x)e^{3x}$ (ב.239

$y(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4\sin x + C_5\cos x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{1088}e^{4x}$ (א.241

$y(x) = C_1 + C_2x + C_3\sin x + C_4\cos x + x^3 - \frac{1}{4}\cos 2x$ (ב.242

$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3\sin x + C_4\cos x + 3 + x\sin 2x$ .243

$y(x) = C_1(x+1) + C_2e^{x} - 1$ .244

$y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^{x}$ .245

$y = \frac{(1+2e)+\sqrt{2}e}{2e^{\sqrt{2}}}e^{\sqrt{2}x} - \frac{(-1+2e)-\sqrt{2}e}{2e^{-\sqrt{2}}}e^{-\sqrt{2}x} - 2e^{x}$ .246

$$y=(1+x)e^{-x}+1/6e^{-x}x^3 \qquad .247$$

$$y=e^{2x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right)+0.25e^{2x}+0.1\cos 2x+0.05\sin 2x \qquad .248$$

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}+\left(0.1x-0.12\right)\cos x-\left(0.3x+0.34\right)\sin x \qquad .249$$

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{-x}-\frac{1}{5}xe^{-4x}+\frac{1}{6}(x-1/6)e^{-x} \qquad .250$$

$$y=e^{x}\left(x\ln|x|+C_1x+C_2\right) \qquad .251$$

$$y=\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)ln\left(e^{x}+1\right)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x} \qquad .252$$

$$y=\left(C_1+\ln|\sin x|\right)\sin x+\left(C_2-x\right)\cos x \qquad .253$$

$$y=\sin 2x\ln|\cos x|-x\cos 2x+C_1\sin 2x+C_2\cos 2x \qquad .254$$

$$y=e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+C_1+C_2x\right) \qquad .255$$

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{\cos x} \qquad .256$$

$$y = \left(C_1 + C_2x + x\ln|x|\right)e^{-x} + \frac{x-1}{4}e^x \quad .257$$

$$y = e^{-x}\left[\frac{1}{8} + \left(C_1 - \frac{x}{2}\right)\cos 2x + \left(C_2 + \frac{x}{8} + \frac{1}{2}\ln|\cos x|\right)\sin 2x\right] \quad .258$$

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + 0.5(\sin x + \cos x) + \frac{3}{2}\sin x - 0.5x^2\cos x \quad .260$$

$$y = C_1 + e^x(C_2\cos x + C_3\sin x) + e^{-x}(C_4\cos x + C_5\sin x) + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{40}\sin 2x \quad .263$$

$$y = x\left[C_1 + \left(C_2 + \ln|\ln x|\right)\ln x\right] + \frac{1+\ln x}{4x} \quad .264$$

$$y = C_1x^2 + C_2x^3 \quad .266 \qquad y = C_1x^3 + C_2x^{-1} \quad .265$$

$$y = (x-2)^2\left(C_1 + C_2\ln|x-2|\right) + x + 1.5 \quad .267$$

$$y = x\left(C_1 + C_2\ln|x| + C_3\ln^2|x|\right) \quad .268$$

$$y = C_1x^2 + \frac{1}{x}\left(C_2 - \frac{2}{3}\ln x - \ln^2 x\right) \quad .269$$

$$y = C_1x^2 + C_2x^{-1} + 0.1\cos\ln x - 0.3\sin\ln x \quad .270$$

$$y = C\left(x^2 - 1\right) + C_2x \quad .271$$

$$y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right) \quad .272$$

$$xy = C_1e^{-x} + C_2e^x \quad .273$$

$$y = C_1\tan x + C_2(1 + x\tan x) \quad .274$$

$$y = C_1\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + C_2\frac{\cos x}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}\cos x \quad .275$$

$$y = C_1\sin x + C_2\left(2 - \sin x\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \quad .276$$

$$y = C_1x + C_2e^x + C_3e^{-x} \quad .277$$

$$y = C_1x + C_2x^{-1} + C_3\left(x\ln|x| + 1\right) \quad .278$$

$$y = C_1x + C_2e^x + C_3\left(x^2 - 1\right) \quad .279$$

$$y = e^{-\sin x^2}\left(C \int e^{\left(1+\sin x^2\right)}x\,dx\right) \quad .280$$

$$y = \frac{x}{\sin x}\left(C_2 - C_1\cot x\right) \quad .281$$

$$y = \tan x\,C\left(\tan x + x + C_2\right) \quad .282$$

$$y = \left(C_1 - \frac{3\ln x}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\frac{x^7}{6} + \left(C_2 + \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{108}x^3\ln x\right)x \quad .284$$

$$y = \frac{1}{8}x^3 \quad .285$$

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+1} - \frac{3}{s^2+9} \quad .286$$

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{s+1}{\sqrt{2}\left(s^2+1\right)} - \frac{2s}{s^2+4} \quad .287$$

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{18}{\left(s - \frac{1}{2}\right)^4} \quad .288$$

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{5(s+2)}{(s-2)^2 + \pi^2} \quad .289$$

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{3(s+1)}{\left(s^2 + 2s + 10\right)^2} \quad .290$$

$$L\left\{f(t)\right\} = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} \quad .291$$

$$y = \cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t \quad .292$$

$$y = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) \quad .293$$

$$y = \frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right) \quad .294$$

$$y = 1.5e^{t/2} \quad .295$$

$$y = \frac{5}{3}e^{-2t}\sin 3t \quad .296$$

$$y = 1 - \cos 2t + \frac{3}{16}(\sin 2t - 2t\cos 2t) \quad .297$$

$$F(s) = \frac{5}{s}\left(e^{-as} - e^{-bs}\right) \quad .298$$

$$\frac{1}{s^2}\left(e^{-s} - 3s^{-3s} + 2e^{-4s}\right) \quad .299$$

$$F(s) = e^{-2s} / s^2 \quad .300$$

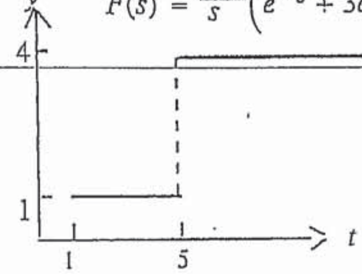
$$F(s) = e^{-2s} / \left(s^2 + 1\right) \quad .301$$

$$F(s) = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} \quad .302$$

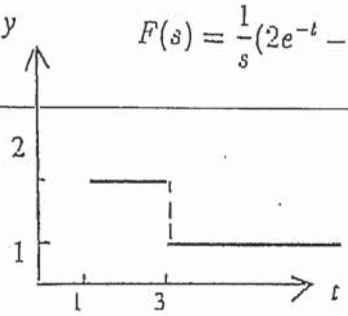
$$F(s) = \frac{1}{s}\left(e^{-s} + 3e^{-4s}\right) \quad .303$$

$$F(s) = \frac{1}{s}\left(e^{-s} + 3e^{-5s}\right) \quad .304$$

$$F(s) = \frac{1}{s}(2e^{-t} - e^{-3t}) \quad .305$$



גרף למס' 304



גרף למס' 305

$$F(s) = A \quad .306$$

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad .307$$

$$F(s) = F_0 e^{-3s} \quad .308$$

$$y = 5\left[e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)}\right]u(t-2) + 8e^{-t} - 4e^{-2s} \quad .309$$

$$y = \cos 4t + \frac{P_0}{4}\sin 4t \quad .310$$

$$y = 2\sin 3t \quad .311$$

$$y = \cos 2t + 0.5\sin\left[2(t-1)\right]u(t-1) \quad .312$$

$$y = E_0 C\left(1 - e^{-t/RC}\right) + \frac{E_1}{R}e^{-(t-1)/RC}u(t-1) \quad .313$$

$$F(s) = \frac{E}{s}\tanh\left(\frac{sT}{4}\right) \quad .314$$

$$F(s) = \frac{1}{\left(1 - e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)} \quad .315$$

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2\left(1 - e^{-2s}\right)} \quad .316$$

$$F(s) = \frac{K}{s^2} - \frac{KTe^{-st}}{s\left(1 - e^{-st}\right)} \quad .317$$

$$y = -\frac{7}{5}e^{t} + \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{1}{15}e^{-4t} \quad .318$$

$$y = \frac{5}{9}e^{-t} - \frac{5}{9}e^{2t} + \frac{5}{3}te^{2t} \quad .319$$

$$y = \frac{7}{9} - \frac{1}{3}t - \frac{7}{9}e^{-3t} \quad .320$$

$$y = 0.5(t-2)\sin t \quad .321$$

$$y = \frac{13}{12}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-x}(\cos 2x - 3\sin 2x) \quad .322$$

$$y = 0.5(\cosh kt + \cos kt) \quad .323$$

$$y = e^{-3t} + \frac{2}{3}\left[1 - e^{-3(t-1)}\right]u(t-1) - \frac{2}{3}\left[1 - e^{-3(t-2)}\right]u(t-2) \quad .324$$

325. $y = \frac{3}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{4}(t-\pi)\sin\left[2(t-\pi)\right]u(t-\pi)$

326. $y = e^{2x} - xe^{2x} + x^3e^{2x}$

327. $y = \frac{7}{2}e^{-t} + \frac{9}{2}e^{-t}t - 0.5\cos t$

328. $$y(t) = \begin{cases} -2+t^2+2\cos t & \text{if } 0 \le t \le 1 \\ 2-t+2\cos t - 2\cos(t-1) + 3\sin(t-1) & \text{if } 1 \le t \le 2 \\ 2\cos t - 2cos(t-1) + 3\sin(t-1) - \sin(t-2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

329. $y = e^{-2x}(\cos x + \sin x + 3)$

330. $y = e^{-2x}(2 - \cos 2x - 2\sin 2x) - e^{-3x}$

331. $y = \frac{11}{21}\sin\frac{3t}{2} - \frac{1}{7}\sin 2t$

332. $y = -\cos t + u(t-\pi)\Big(-\cos(t-\pi)\Big) + e^{-(t-\pi)}\Big(1 + (t-\pi)\Big) + 2e^{-t} + 2te^{-t}$

333. $q = \frac{E_0}{L\omega^2}(1 - \cos\omega t)$

335. $f * g = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 3 \\ 2 - 2\cos(t-3) & 3 \le t \end{cases}$

336. $5t^2$

337. $\frac{1}{4}t^4 - t^3$

338. $-\frac{3}{8}\cos 3t + \frac{3}{8}\cos t$

339. $1 + t + e^{-t}$

$\cancel{t + 1 + e^{-t} - (t-1)u(t-1)}$ ~~.340~~

341. $2 - 2\cos 2t - \left\{2 - 2\cos\left[2(t-2)\right]\right\}u(t-2)$

342. $3e^{-3t} * e^{-t}$

343. $5\cos 3t * e^{4t}$

344. $u(t-3) * \frac{1}{4}\sin 4t$

345. $\delta(t-2) * e^{-3t}$

346. $\left[2u(t-1) - 3u(t-2)\right] * \cos 3t$

247. $\cos 4t$

248. $e^{-2(t-2)}u(t-2)$

249. $y = \int_0^t ua^{-au}f(t-u)du$ או $y = \int_0^t (t-u)e^{-a(t-u)}f(u)du$

250. $I = f(t) * \frac{1}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right) = \int_0^t f(t-u)\frac{e^{-au} - e^{-bu}}{b-a}du$

351. $$y = 2e^{-2t} - 2e^{-3t} + \int_0^t \frac{1}{1+u}\left(e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\right)du$$

352. $$\Theta = \int_0^t K\zeta(u)\sin\left[K(t-u)\right]du \quad \text{או} \quad \int_0^t K\zeta(t-u)\sin Ku\,du$$

---

353. $$x = C_1e^{t} + C_2e^{5t},\quad y = -C_1e^{t} + 3C_2e^{5t}$$

354. $$x = C_1e^{-t} + C_2e^{3t},\quad y = 2C_1e^{-t} - 2C_2e^{3t}$$

355. $$x = 2C_1e^{3t} - 4C_2e^{-3t},\quad y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t}$$

356. $$x = e^{2t}\left(C_1\cos t + C_2\sin t\right),\quad y = \left[\left(C_1 + C_2\right)\cos t + \left(C_2 - C_1\right)\sin t\right]$$

357. $$x = e^{t}\left(C_1\cos 3t + C_2\sin 3t\right),\quad y = e^{t}\left(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t\right)$$

358. $$x = \left(2C_2 - C_1\right)\cos 2t - \left(2C_1 + C_2\right)\sin 2t,\quad y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$$

359. $$x = \left(C_1 + C_2t\right)e^{3t},\quad y = \left(C_1 + C_2 + C_2t\right)e^{3t}$$

360. $$x = \left(C_1 + C_2t\right)e^{t},\quad y = \left(2C_1 - C_2 + 2C_2t\right)e^{t}$$

---

361. $$x = \left(C_1 + 2C_2t\right)e^{-t},\quad y = \left(C_1 + C_2 + 2C_2t\right)e^{-t}$$

362. $$x = \left(C_1 + 3C_2t\right)e^{2t},\quad y = \left(C_2 - C_1 - 3C_2t\right)e^{2t}$$

363. $$x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t},\quad y = C_1e^{t} - 3C_3e^{-t},\quad z = C_1e^{t} + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}$$

364. $$x = C_1 + 3C_2e^{2t},\quad y = -2C_2e^{2s} + C_3e^{-t},\quad z = C_1 + C_2e^{2t} - 2C_3e^{-t}$$

365. $$x = C_2e^{2t} + C_3e^{3t},\quad y = C_1e^{t} + C_2e^{2t},\quad z = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{3t}$$

366. $$x = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\quad y = C_1e^{t} - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t},\quad z = -C_1e^{t} - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}$$

367. $$x = C_1e^{t} + C_3e^{-t},\quad y = C_1e^{t} + C_2e^{2t},\quad z = 2C_2e^{2t} - C_3e^{-t}$$

368. $$x = e^{t}\left(2C_2\sin 2t + 2C_3\cos 2t\right),\quad y = e^{t}\left(C_1 - C_2\cos 2t + C_3\sin 2t\right),\quad z = \left(-C_1 - 3C_2\cos 2t + 3C_3\sin 2t\right)$$

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + e^{3t}\left(C_2 \cos t + C_3 \sin t\right), \\ y &= e_{3t}\left[\left(C_2 + C_3\right)\cos t + \left(C_3 - C_2\right)\sin t\right], \\ z &= C_1 e^{2t} + e^{3t}\left[\left(2C_2 - C_3\right)\cos t + \left(2C_3 + C_2\right)\sin t\right] \end{aligned}$$ .369

$$\begin{aligned} x &= C_2 \cos t + \left(C_2 + 2C_3\right)\sin t, \\ y &= 2C_1 e^t + C_2 \cos t + \left(C_2 + 2C_3\right)\sin t, \\ z &= C_1 e^t + C_3 \cos t - \left(C_2 + C_3\right)\sin t \end{aligned}$$ .370

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{2t} + \left(C_2 + C_3\right)e^{3t}, \\ y &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}, \\ z &= C_1 e^{2t} + C_3 e^{3t} \end{aligned}$$ .371

$$\begin{aligned} x &= C_1 + C_2 e^t \\ y &= 3C_1 + C_3 e^t \\ z &= -C_1 + (C_2 - C_3)e^t \end{aligned}$$ .372

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{32}\left(e^{2t} - e^{-2t} - 2\sin 2t\right), \\ x &= \frac{1}{32}\left(3e^{2t} + 3e^{-2t} - 10\sin 2t\right) \end{aligned}$$ .373

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{2}{9}(t - \cos 3t), \\ x &= \frac{1}{2}\left(e^t + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{11}{9}\cos 3t + \frac{2}{9}\right) \end{aligned}$$ .374

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3e^{2t} & 0 \\ 0 & -2e^{2t} & e^{-t} \\ 1 & e^{2t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6t + C_1 \\ -e^{-2t} + C_2 \\ -4e^t + C_3 \end{pmatrix}$$ .375

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t}, \\ y &= -C_1 e^{3t} + \left(C_2 + 2C_3\right)e^{-t}, \\ z &= -3C_1 e^{3t} + C_3 e^{-t} \end{aligned}$$ .376

$$y(x) = \begin{pmatrix} C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{2x} - \frac{x}{6} - \frac{5}{36} \\ C_1 e^{3x} + C_3 e^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \\ C_2 e^{3x} + C_3 e^{2x} - \frac{x}{6} - \frac{5}{36} \end{pmatrix}$$ .377

$$\begin{aligned} x &= \left(C_1 + C_2 t\right)e^t + C_3 e^{2t}, \\ y &= \left(C_1 - 2C_2 + C_2 t\right)e^t, \\ z &= \left(C_1 - C_2 + C_2 t\right)e^t + C_3 e^{2t} \end{aligned}$$ .378

$$\begin{aligned} x &= \left(C_2 + C_3 t\right)e^{-t}, \\ y &= 2C_1 e^t - \left(2C_2 + C_3 + 2C_3 t\right)e^{-t} \\ z &= C_1 e^t - \left(C_2 + C_3 + C_3 t\right)e^{-t} \end{aligned}$$ .379

$$\begin{aligned} x &= C_1 - C_2 t + 4C_3^{3t}, \\ y &= C_1 - C_2 t + 4C_3 e^{3t}, \\ z &= C_1 - C_2 + C_2 t + C_3^{3t} \end{aligned}$$ .380

$$x = \left(C_1 + C_3 t\right)e^t, \quad y = \left(C_2 + 2C_3 t\right)e^t, \quad z = \left(C_1 - C_2 - C_3 - C_3 t\right)e^t$$ .381

$$x = \left(C_1 + C_1 t + C_3 t^2\right)e^{2t}, \quad y = \left[2C_1 - C_2 + \left(2C_2 - 2C_3 t\right) + 2C_3 t^2\right]e^{2t}; \quad z = \left[C_1 - C_2 + 2C_3 + \left(C_2 - 2C_3\right)t + C_3 t^2\right]e^{2t}$$ .382

$$x = 3C_1 e^t + 3C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$ .383

$$x = -2e^t\left(C_1 + C_2 + C_2 t\right) - 2e^{-t}\left(C_3 - C_4 + C_4 t\right), \quad y = e^t\left(C_1 + C_2 t\right) + e^{-t}\left(C_3 + C_4 t\right)$$ .384

$$x = e^t\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right) + e^{-t}\left(C_3 \cos t + C_4 \sin t\right), \quad y = e^t\left(C_1 \sin t - C_2 \cos t\right) + e^{-t}\left(C_4 \cos t - C_3 \sin t\right)$$ .385

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + te^t - t^2 - 2, \quad y = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \left(t - 1\right)e^t - 2t$$ .386

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t} - 2\sin t - \cos t, \quad y = 2C_1 e^{2t} - C_2 e^{-t} + \sin t + 3\cos t$$ .387

$$x = C_1 e^t + 2C_2 e^{4t} + 3e^{5t}, \quad y = -C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{5t}$$ .388

$$x = C_1\left(\cos 2t - \sin 2t\right) + C_2\left(\cos 2t + \sin 2t\right), \quad y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}$$ .389

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \left(t + 1\right)e^{2t}, \quad y = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^{3t} - 2te^{2t}$$ .390

$$x = \left(C_1 + 2C_2 t\right)e^t - 3, \quad y = \left(C_1 + 2C_2 t + C_2\right)e^t - 2$$ .391

$$x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}, \quad y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{-t} - e^{3t}$$ .392

$$x = C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t + e^t + t + 1, \quad y = C_1 e^t\left(-\cos t - \sin t\right) + C_2 e^t\left(\cos t - \sin t\right) - 2e^t - 2t - 1$$ .393

$$x = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} - \cos t + 3\sin t, \quad y = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + 2\cos t - \sin t.$$ .394

$$x = 4C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - 4te^t, \quad y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - \left(t - 1\right)e^t$$ .395

$$x = C_1 e^{3t} + 3t^2 + 2t + C_2, \quad y = -C_1 e^{3t} + 6t^2 - 2t + 2C_2 - 2$$ .396

.397
$$x = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - (12t+13)e^t,\quad y = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - (8t+6)e^t$$

.398
$$x = 2C_1e^{8t} - 2C_2 - 6t + 1,\quad y = 3C_1e^{3t} + C_2 + 3t$$

.399
$$x = 3C_1e^t + C_2e^{-t} + 3\sin t,\quad y = C_1e^t + C_2e^{-t} - \cos t + 2\sin t$$

.400
$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + t\sin t - t\cos t,\quad y = C_1(\sin t + \cos t) + C_2(\sin t - \cos t) - 2t\cos t + \sin t + \cos t$$

.401
$$x = \left(C_1 + C_2t - t^2\right)e^t,\quad y = \left[C_1 - C_2 + \left(C_2 + 2\right)t - t^2\right]e^t$$

.402
$$x = C_1\cos t - C_2\sin t + \tan t,\quad y = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2$$

.403
$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + t(\cos t + \sin t) + (\cos t - \sin t)\ln|\sin t|,\quad y = \left(C_1 - C_2\right)\cos t + \left(C_1 + C_2\right)\sin t + 2\cos t\ln|\cos t| + 2t\sin t$$

.404
$$x = \left(C_1 + 2C_2t - 8t^{5/2}\right)e^t,\quad y = \left(C_1 + 2C_2t - C_2 - 8t^{5/2} + 10t^{3/2}\right)e^t$$

.405
$$x = C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

.406
$$x = C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + C_2e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

.407
$$x = C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

.408
$$x = C_1\cos t + C_2\sin t,\quad y = -C_1\sin t + C_2\cos t$$

.409
$$y = a_0\left[1 - 3x^2\right] + a_1\left[x - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{20}x^5 + \cdots\right]$$

.410
$$y = a_0\left[1 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{30}x^6 + \cdots\right] + a1\left[x - \frac{2}{3}x^3\right]$$

.411
$$y = a_0\left[1 - 3x^2\right] + a_0\left[x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{15}x^5 - \frac{8}{90}x^7 + \cdots\right]$$

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots = \frac{\sin x}{x}$$ .412

$$y_2 = \frac{1}{x} - \frac{x}{2!} + \frac{x^3}{4!} - \cdots = \frac{\cos x}{x}$$

$$y_1 = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots = \frac{e^x}{x};$$ .413

$$y_2 = |x|^{1/2}\left(1 + \frac{2x}{5} + \frac{(2x)^2}{5\cdot 7} + \frac{(2x)^3}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots\right)$$

$$y_1 = x^{1/3}\left(1 + \frac{x^2}{5\cdot 6} + \frac{x^4}{5\cdot 6\cdot 11\cdot 12} + \cdots\right);$$ .414

$$y_2 = x^{2/3}\left(1 + \frac{x^2}{6\cdot 7} + \frac{x^4}{6\cdot 7\cdot 12\cdot 13} + \cdots\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2};$$ .415

$$y_2 = x^2 + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{4\cdot 5} + \frac{x^5}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots = 6\left(\frac{e^x - 1}{x} - 1 - \frac{x}{2}\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{40} + \frac{7x^4}{720} + \cdots;$$ .416

$$y_2 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{5} + \frac{x^4}{20} + \cdots$$

$$y_1 = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \cdots = xe^x;$$ .417

$$y = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$$ 418

$$y = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4;$$ .419

$$\lambda = 4$$

$x\left(y^2-1\right)^2=y^3-3y+C$ .420

$\sqrt{y-x}-\sqrt{x}=C;\ y=x$ .421

$y=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{-x}+0.5\cos x$ .422

$\sqrt{y-\frac{1}{2}}=x+\frac{1}{\sqrt{2}}$ .423

$x\sqrt{y}=\sin x+C;\ y=0$ .425

$y^2+2x^2\ln Cy=0;\ y=0$ .426

$xy\cos x-y^2=C$ .427

$y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\sin x+C_4\cos x-0.25x\sin x+0.25x\cos x+x/8(-3)e^{x}$ .428

$y(t)=0.5e^{-t}t^2+0.5u_1(t)e^{-t}(t-1)^2$ .429

$x=\cos t\left(1-\int_0^t\sin s\left(s\sqrt{s}+\frac{3}{4\sqrt{s}}\right)ds\right)+\sin t\left(1+\int_0^t\cos s\left(s\sqrt{s}+\frac{3}{4\sqrt{s})}ds\right)$; .430
$y=x'+t\sqrt{t}-\frac{3}{2\sqrt{t}}$

$y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+\left(C_3+C_4x+C_5x^5\right)e^{2x}$ .431

$y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}-0.5e^{x}\ln\left(1+x^2\right)+xe^{x}\arctan x$ .432

$xy\left(\ln^2 x+C\right)=1$ .433

$\cos xy=\frac{\cos 1}{\sin\frac{1}{\pi}}\sin x$ .435

$e^{x}\cos y+e^{y}\sin x=0$ .436

$y''+\frac{x^2-2}{2x-x^2}y'+\frac{2(1-x)}{x(2-x)}y=1-\frac{2}{x(2-x)}$ .437

$y=e^{x}$ .438

$y=C_1\left(1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{3m}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3m-1)3m}\right)+C_2\left(x+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m+2}}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot}\right)$ .439

$y_1=e^{-x^2/2};\ y_2=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2m+1)}$ .440

$$y = C_1e^{-\sqrt[5]{2}x} + e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{\pi}{5}}\left[C_2\cos\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x + C_3\sin\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{\pi}{5}\right)x\right] +$$ .442

$$+ e^{\sqrt[5]{2}x\cos\frac{3\pi}{5}}\left[\left(C_4\cos\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x + C_5\sin\left(\sqrt[5]{2}\sin\frac{3\pi}{5}\right)x\right]$$

$x = Cy^2 - y^2(y+1)e^{-y};\ y = 0$ .443

$(y - 4x + 2)^4(2y + 2x - 1) = C$ .444

$y^3 = \left(C - x^3\right)\sin^3 x$ .445

$y - \frac{x}{y} + \ln|y| = C;\ y = 0$ .446

$y = \sin x + C\cos$ .447

$27(y - 2x)^2 = (C - 2x)^3$ .448

$-\ln|x| = \sin\frac{y}{x} + C$ .449

$3\sqrt{y} = x^2 - 1 + C\sqrt[4]{|x^2 - 1|};\ y = 0$ .450

$y = e^x\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .451

$y(t) = t - u(t-1)\left[t - 1 - \sin(t-1)\right]$ .452

דוגמאות של מבחנים

מבחן מס' 1:

1. מצא את פתרון הכללי של המשוואה:

$$\left(y / x\right)dx + \left(y^3 - \ln x\right)dx = 0$$

2. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:

$$yy'' - y'^2 = y^2y'$$

3. א) הוכח שאם $y_1(x)$, $y_2(x)$ הינם פתרונות של משוואה לא הומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

אזי ההפרש $y_1(x) - y_2(x)$ הוא פתרון המשוואה ההומוגנית:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ב) נתון ש $y = Cx^3 + \frac{1}{x}$ פתרון המשוואה $y'' + p(x)y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$ לכל קבוע C.
מצא את $p(x)$, $f(x)$ ואת פתרון הכללי של המשוואה הזו:

$$y'' + p(x)y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$$

4. בעזרת התמרת לפלס מצא את הפתרון הפרטי של המשוואה:

$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = y(0) \end{cases}, \qquad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ \sin(t - \pi), & \pi < t \le 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$$

5. מצא את הפתרון הכללי של המערכת:

$$\overline{Y}' = A\overline{Y} + \overline{b}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה:

$$y^{(4)} + 4y = \sin 2x + 25xe^x$$

פתרון למבחן מס'1.

.1

$$\frac{y}{x}dx + \left(y^3 - \ln x\right)dy = 0$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x} \qquad , \left(y^3 - \ln\right)'_x = -\frac{1}{x}$$

המשוואה אינה מדויקת. נחפש גורם האינטגרציה ב צורה: $\mu = \mu(y)$

תנאי קיום של גורם האינטגרציה מסוג הזה הוא:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{Q'_x - P'_x}{P} = f(y); \quad P(x,y)dx + P(x,y)dy = 0$$

$$P(x,y) = \frac{y}{x}; \quad Q(x,y) = y^3 - \ln x$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{-1}{x} - \frac{-1}{x}}{\frac{y}{x}} = \frac{-2}{y} \Rightarrow \mu(y) = \frac{1}{y^2}$$

$$du(x,y) = \frac{1}{xy}dx + \left(y - \frac{\ln x}{y^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{xy} \Rightarrow (x,y) = \frac{\ln x}{y} + \phi(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\ln x}{y^2} + \phi'(y) = y - \frac{\ln x}{y^2}; \quad (y) = \frac{y^2}{2}$$

תשובה סופית:

$$\frac{\ln x}{y} + \frac{y^2}{2} = C$$

.2

פתרון האפשרי:

$$yy'' - y'^2 = y^2y'$$

$$y' = p \quad y'' = p'p$$

$$ypp' - p^2 = y^2p; \quad \underline{p = 0} \Rightarrow y = C$$

$$yp' - p = y^2$$

$$p' - \frac{1}{y}p = y$$

$$\mu(y) = \exp\int\left(-\frac{dy}{y}\right) = e^{-\ln|y|} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{p}{y} = \int dy \Rightarrow \frac{p}{y} = yC_1$$

$$p = y\left(y + C_1\right); \quad p = \frac{dy}{dx}; \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(y + C_1\right)$$

$$\int\frac{dy}{y\left(y + C_1\right)} = \int dx; \qquad \frac{1}{y\left(y + C_1\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y + C_1};$$

$$A = -B; \qquad A = \frac{1}{C_1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y\left(y + C_1\right)} = \frac{1}{C_1}\left[\int\frac{dy}{y} - \int\frac{dy}{y + C_1}\right]$$

פתרון סופי:
$$\frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y+C_1}\right| = x + C_2$$

3. א) אם $y_1(x)$ ו-$y_2(x)$ הינם פתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ אזי מתקיימים השוויונות:
$$y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = f(x)$$
$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = f(x)$$

הפרש השויונות יתן:
$$\left(y_1 - y_2\right)'' + p(x)\left(y_1 - y_2\right)' + q(x)\left(y_1 - y_2\right) = 0$$
ב) אם נתון הפתרון $y = Cx^3 + \frac{1}{x}$ למשוואה $y'' + p(x)y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$ לכל C נקח שני ערכים של הקבוע (ניתן לבחור אותם באופן שרירותי):
$$C = 1 \text{ ו } C = 2$$
לפי סעיף א) אחד מהפתרנות הפרטיים יהיה בצורת הפרש $y_1(x) - y_2(x)$

כאשר
$$y_1 = 2x^3 + \frac{1}{x}$$
$$y_2 = x^3 + \frac{1}{x}$$
אזי : $y^h = x^3$ הוא פתרון למשוואה $y'' + p(x)y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$

נציב הפתרון לתוך המשוואה:
$$\left(x^3\right)'' + p(x)\left(x^3\right)' + 12x = 0 \;\Rightarrow\; 6x + 3x^2p(x) + 12x = 0 \;\Rightarrow\; p(x) = -\frac{6}{x}$$
כוון ש: $\frac{1}{x}$ הוא פתרון פרטי למשוואה $y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$

נקבל:
$$\left(\frac{1}{x}\right)'' - \frac{6}{x}\left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{12}{x^3} = f(x)$$
נמצא את פתרון השני של $y'' - \left(\frac{6}{x}\right)y' + \frac{12}{x^2}y = 0$
$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx = x^3\int\frac{e^{-\int\frac{6}{x}dx}}{x^6}dx = x^4$$
תשובה סופית: $y = C_1x^3 + C_2x^4 + \frac{1}{x}$

.4
$$\begin{cases} y'' + 4y = f(t) \\ y(0) = y(0) \end{cases}, \qquad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le \pi \\ \sin(t-\pi), & \pi < t \le 2\pi \\ 0, & t > 2\pi \end{cases}$$
נעתיק $f(t)$ בצורה יותר נוחה להתמרת לפלס. כאן נסמן על ידי H את פונקצית מדרגה.
$$f(t) = t\left(1 - H(t-\pi)\right) + \sin(t-\pi)\left(H(t-\pi) - \sin(t-2\pi)\right) = t - (t - \pi + \pi)H(t-\pi) +$$
$$\sin(t-\pi)H(t-\pi) - \sin(t-\pi)H(t-2\pi) =$$
$$t - (t-\pi)H(t-\pi) - \pi H(t-\pi) + \sin(t-\pi)H(t-\pi) + \sin(t-2\pi)H(t-2\pi)$$

התמרת לפלס של הפונקציה $f(t)$ תהיה:

$$L\left\{t-(t-\pi)H(t-\pi)-\pi H(t-\pi)+\sin(t-\pi)H(t-\pi)+\sin(t-2\pi)H(t-2\pi)\right\}=$$

$$\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\pi\frac{e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

$$s^2F(s)+4F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\pi\frac{e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

$$F(s)=\frac{1}{s^2+4}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-\pi s}}{s^2}-\pi\frac{e^{-\pi s}}{s}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}+\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\right]$$

אחרי פרוק לשברים פשוטים, נכתוב התמרת לפלס לכל אחד מאברים בנפרד:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+4\right)s^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}\right]\right\}=\frac{1}{4}t-\frac{1}{8}\sin 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)s^2}\right\}=H(t-\pi)\left[\frac{(t-\pi)}{4}-\frac{\sin 2(t-\pi)}{8}\right]$$

$$L^{-1}\left\{\frac{\pi e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)s}\right\}=\frac{\pi H(t-\pi)}{4}\left[1-\frac{\cos 2(t-\pi)}{2}\right]$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s}}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right\}=\frac{H(t-\pi)}{3}\left[\sin(t-\pi)-\frac{1}{2}\sin 2(t-\pi)\right]$$

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-2\pi s}}{\left(s^2+4\right)\left(s^2+1\right)}\right\}=\frac{H(t-2\pi)}{3}\left[\sin(t-2\pi)-\frac{1}{2}\sin 2(t-2\pi)\right]$$

$$y=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right) & 0\le t\le\pi\\ \frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+\frac{1}{4}\left[(t-\pi)-\frac{\sin 2(t-\pi)}{2}\right]-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\cos t}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\sin 2t}{2}+\sin t\right) & \\ \frac{1}{4}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+\frac{1}{4}\left[(t-\pi)-\frac{\sin 2(t-\pi)}{2}\right]-\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{\cos t}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{\sin 2t}{2}+\sin t\right)+ & t>2\pi\\ \frac{1}{3}\left(\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right) & \end{cases}$$

שורה אמצעית מתאימה למקרה: $\pi<t\le 2\pi$

.5

$$\overline{y}\,' = A\overline{y} + \overline{b}; \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \overline{b} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda-1 & 0 & 1+\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$-\left(1+\lambda\right)\left(\lambda^2-1\right) + \left(1+\lambda\right)\left(1+\lambda^2\right) = -\left(\lambda+1\right)\left(\lambda^2-\lambda-2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 2; \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$\underline{\lambda_1 = 2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow & u_1 = u_2 \\ \Rightarrow & u_2 = u_3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \overline{u^1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = \lambda_3 = -1} \quad \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 = -u_2 - u_3 \Rightarrow \begin{cases} u_2 = 1 \\ u_3 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{u^2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ u_3 = -1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \overline{u_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y_h} = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\det Y = e^{2t}\left(-e^{-t}\right)\left(-e^{-t}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

$$Y\overline{C'} = \overline{b};$$

כלל קרמר:

$$C_1' = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} t & e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & -e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-t} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\, te^{-2t}$$

$$C_2' = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} e^{2t} & t & e^{-t} \\ e^{2t} & 0 & 0 \\ e^{2t} & 0 & -e^{-t} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}t\left(e^{-t}\right) = \frac{1}{3}\, te^{-t}$$

$$C_3' = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{-t} & t \\ e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\, te^{t}$$

$$C_1(t) = \frac{1}{3}\int t\,e^{-2t}dt = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\int t de^{-2t}\right) = -\frac{1}{6}\left(t\,e^{-2t} - \int e^{-2t}dt\right) =$$

$$-\frac{1}{6}\left(t\,e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right) = -\frac{1}{6}e^{-2t}\left(t+\frac{1}{2}\right)$$

$$C_2(t) = \frac{1}{3}\int te^t dt = \frac{1}{3}\left(te^t - e^t\right) = \frac{e^t}{3}(t-1)$$

$$C_3(t) = \frac{1}{3}\left(te^t - e^t\right) = \frac{e^t}{3}(t-1)$$

$$\overline{y} = \overline{y_h} + \left(\frac{-e^{2t}}{6}\left(t+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t}\end{pmatrix} + \frac{e^t}{3}(t-1)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \\ 0\end{pmatrix} + \frac{e^t}{3}(t-1)\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t}\end{pmatrix}\right) =$$

$$= \overline{y_h} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right) + (t-1) + (t+1) \\ -\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right) - (t-1) \\ -\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\right) - (t-1) \end{pmatrix} =$$

:תשובה סופית

$$= \begin{pmatrix} C_1e^{2t} + C_2e^{-t} + C_3e^{-t} + \frac{1}{2}t - \frac{9}{12} \\ C_1e^{2t} - C_2e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \\ C_3e^{2t} - C_2e^{-t} - \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

.6

$$y^{(4)} + 4y = \sin 2x + 25xe^x$$

$$y^{(4)} + 4y = 0$$

$$k^4 + 4 = 0; \quad k = \sqrt[4]{-4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right)$$

$$k_0 = 1+i;\ k_1 = -1+i \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^x\cos x; & y_2 = e^x\sin x \\ y_3 = e^{-x}\cos x; & y_4 = e^{-x}\sin x \end{cases}$$

$$k_2 = -1-i\ ; k_3 = 1-i$$

1. $y^{(4)} + 4y = \sin 2x \quad \Rightarrow \quad \overline{y_1} = a\cos 2x + b\sin 2x$

$$\overline{y_1'} = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x; \qquad \overline{y_1''} = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$$

$$\overline{y_1'''} = 8a\sin 2x - 8b\cos 2x; \qquad \overline{y_1''''} = 16a\cos 2x + 16b\sin 2x$$

$$\overline{y_1''''} + 4\overline{y_1} = 16a\cos 2x + 16b\sin 2x + 4a\cos 2x + 4b\sin 2x =$$

$$= 2a\cos 2x + 20b\sin 2x = \sin 2x \quad \Rightarrow; \quad a = 0; \quad b = \frac{1}{20} \Rightarrow$$

$$\overline{y_1} = \frac{1}{20}\sin 2x$$

$$y^{(4)} + 4y = 25xe^x$$

$$\overline{y_2}(ax+b)e^x; \quad \overline{y_2'''} = \left(5ax + \left(4a+5b\right)\right)e^x$$

$$y^{(4)} + 4y = \left(5ax + \left(4a+5b\right)\right)e^x = 25xe^x \quad \Rightarrow \begin{cases} 5a = 5 \\ 4a + 5b = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$$

$$\overline{y_2} = \left(5x+4\right)e^x$$

$$y = e^x\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-x}\left(C_3 x + C_4 \sin x\right) + \frac{1}{20} \sin 2x + \left(5x+4\right)e^x$$

מבחן מס' 2 :

1. מצא את הפתרון הכללי למשוואה:

$$y' = \left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$$

2. מצא גורם האינטגרציה ופתור את המשוואה:

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x^2 + y^2\right)dy = 0$$

3. מצא את הפתרון למשוואה:

$$xy'' - 4y' = x^2\sqrt{y'}$$

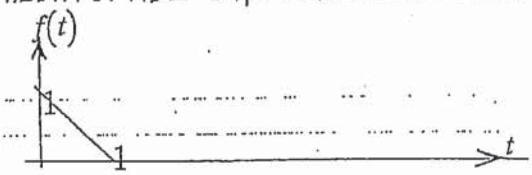
אם תנאי ההתחלה: $y'(1) = 0; \quad y(1) = \frac{1}{250}$

4. מצא את הפתרון הכללי למשוואה:

$$y^{(4)} - y = xe^x + \cos 2x$$

5. פתור את הבעית קושי בעזרת התמרת לפלס

$$\begin{cases} y'' + y = (t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$



6. מצא את הפתרון הפרטי למערכת:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} y \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

תשובות למבחן מס'2:

.1 $$\exp\left(-2\arctan\frac{(y+2)}{(x-3)}\right) = C(y+2)$$

.2 $$yx^2e^x + \frac{y^3}{3}e^x = C$$

.3 $$y = \frac{x^5}{10}\left(\frac{1}{2}\ln^2 x - \frac{1}{5}\ln x + \frac{1}{25}x^5\right)$$

.4 $$y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x + \frac{1}{8}\left(x^2 - 3x\right)e^x + \frac{1}{15}\cos 2x$$

.5 $$y(t) = 1 - t - \cos t + \sin t + H(t-1)\left(1 - \sin(t-1)\right)$$

6. פתרון פרטי:

$$y(x) = \begin{pmatrix} -4e^{2x} + 5e^{3x} \\ 7e^{2x} - 5e^{3x} \\ -7e^{2x} + 10^{3x} \end{pmatrix}$$

מבחן מס' 3 :

1. מצא הפתרון הכללי של המשוואה:

$$y'=\frac{x^2+2x+y}{x-3x^{2y}}$$

2. מצא הפתרון הכללי של המשוואה:

$$y''+y'^2=2e^{-y}$$

3. . מצא הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית:

$$y''-2(1+tg^2x)y=\cot x$$

כאשר $y_1=tgx$

הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית

4. . מצא הפתרון הכללי (ממשי) של המשוואה:

$$y^{(IV)}+y''=6x-3\cos 2x$$

5. פתור את הבעית קושי תוך שימוש בהתמרת לפלס:

$$y''+4y=\begin{cases}\frac{4}{\pi}t & 0\le t\le\frac{\pi}{4}\\ 1 & \frac{\pi}{4}<t\le\frac{\pi}{2}\\ \sin t & \frac{\pi}{2}<t\le\pi\\ 0 & t>\pi\end{cases}$$

;; כאשר נתונים תנאי התחלה:

$$y(0)=0,\ y'(0)=0$$

6. מצא הפתרון הכללי של המערכת משוואות דיפרנציאליות:

$$\begin{cases}y_1'=2y_1-y_2+2y_3\\ y_2'=y_1+2y_3+2e^x\\ y_3'=-2y_1+y_2-y_3+e^x+1\end{cases}$$

פתרונות:

שאלה 1.

$$y'=\frac{x^2+2x+y}{x-3x^{2y}}$$

$$(x^2+2x+y)dx+(3x^2y-x)dy=0 \quad (*)$$

$$M=x^2+2x+y; \quad N=3x^2y-x$$

$$M_y^{'}=1; \quad N_x^{'}=6xy-1$$

$$\frac{M_y^{'}-N_x^{'}}{N}=\frac{1-6xy+1}{3x^2y-x}=-\frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}=-\frac{2}{x}\Rightarrow \mu=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=x^{-2}$$

נכפיל את המשוואה (*) בגורם האינטגרציה

נקבל: $\mu=x^{-2}$

$$du=\frac{x^2+2x+y}{x^2}dx+\frac{3x^2y-x}{x^2}dy=0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x^2+2x+y}{x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{3x^2y-x}{x^2};$$

$$u=\int\frac{x^2+2x+y}{x^2}dx=x+2\ln|x|-\frac{y}{x}+C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{x}+C^{'}(y)=\frac{3x^2y-x}{x^2} \quad \Rightarrow C^{'}(y)=3y \quad \Rightarrow C(y)=\frac{3y^2}{2}$$

$$u=x+2\ln|x|-\frac{y}{x}+\frac{3y^2}{2}=C$$

שאלה 2:

$$y''+y'^2=2e^{-y};$$

נסמן:

נקבל: $y'=p(y); \quad y''=p'p$

פתרון: $p'p+p^2=2e^{-y} \quad /:p \qquad p=0\Rightarrow \boxed{y=C}$

נעבור למשוואה ליניארית ע"י ההצבה: $p'+p=2e^{-y}p^{-1}$ משוואת ברנולי:

המשוואה הליניארית המתאימה היא $z = p^2, z' = 2pp'$

$$z' + 2z = 4e^{-y}$$

$$\mu = e^{\int 2dy} = e^{2y} \quad \Rightarrow (ze^{2y})' = 4e^{y} + C_1 \Rightarrow z = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$$

$$z = p^2 \Rightarrow y' = p = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}$$

$$\int \frac{dy}{\pm\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}} = \int dx = x + C_2$$

$$\pm\int \frac{e^{y} dy}{\sqrt{4e^{y} + C_1}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1}; \quad \Rightarrow \boxed{\pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + C_1} = x + C_2}$$

שאלה 3: נתבונן במשוואה הומוגנית:

$$y'' - 2(1 + tg^2 x)y = 0$$

$$y_1 = tgx \quad \Rightarrow W = e^{\int pdx} = 1$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{W}{y_1^2} dx = tgx \int \frac{dx}{tg^2 x} = tgx \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = tgx(-\cot x - x) = \boxed{-xtgx - 1}$$

שאלה 4:

$$y^{(IV)} + y'' = 6x - 3\cos 2x \quad \Rightarrow y^{(IV)} + y'' = 0 \quad \Rightarrow k^4 + k^2 = 0$$

$$k_{1,2} = 0; k_{3,4} = -i$$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית:

$$y_h = C_1 x + C_2 + C_3 \sin x + C_4 \cos x$$

פתרון פרטי יהיה בעל הצורה:

$$\tilde{y} = x^2(Ax + B) + C\cos 2x + \sin 2x$$

$$\tilde{y}' = 3x^2 + 2Bx - 2C\sin 2x + 2D\cos 2x$$

$$\tilde{y}'' = 6Ax + 2B - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x$$

$$\tilde{y}''' = 6A + 8C\sin 2x - 8D\cos 2x$$

$$\tilde{y}'''' = 16C\cos 2x + 16D\sin 2x$$

$$16C\cos 2x + 16D\sin 2x + 6Ax + 2B - 4C\cos 2x - 4D\sin 2x = 6x - 3\cos 2x$$

$$6Ax + 2B + 12C\cos 2x + 12D\sin 2x = 6x - 3\cos 2x$$

$$6A=6 \Rightarrow A=1;$$
$$2B=0 \Rightarrow B=0;$$
$$12C=-3 \Rightarrow C=-\frac{1}{4}$$
$$12D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \tilde{y}=x^3-\frac{1}{4}\cos 2x \Rightarrow$$
$$y=y_h+\tilde{y}=\boxed{C_1x+C_2+C_3\sin 2x+C_4\cos 2x+x^3-\frac{1}{4}\cos 2x}$$

שאלה 5:

$$y''+4y=\begin{cases} \frac{4}{\pi}t & 0\le t\le \frac{\pi}{4} \\ 1 & \frac{\pi}{4}<t\le \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2}<t\le \pi \\ 0 & t>\pi \end{cases} \qquad y(0)=0, y'(0)=0$$

פתרון:

$$(s^2+4)F(s)=L\{(1-H(t-\frac{\pi}{4}))\frac{4}{\pi}t+H(t-\frac{\pi}{4})-H(t-\frac{\pi}{2})+(H(t-\frac{\pi}{2})-H(t-\pi))\sin t\}=$$
$$L\{\frac{4}{\pi}t-H(t-\frac{\pi}{4})\frac{4}{\pi}[(t-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]+H(t-\frac{\pi}{4})-H(t-\frac{\pi}{2})+H(t-\frac{\pi}{2})\cos(t-\frac{\pi}{2})+$$
$$H(t-\pi)\sin(t-\pi)\}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{s^2}-\frac{4}{\pi}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}s}{s^2+1}+\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$
$$F(s)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{s^2(s^2+4)}-\frac{4}{\pi}\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{s^2(s^2+4)}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+4)}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}s}{(s^2+1)(s^2+4)}+\frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}=$$
$$\frac{1}{\pi}[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}]-\frac{e^{-\frac{\pi}{4}s}}{\pi}[\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+4}]-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{\pi}[\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+4}]+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{3}[\frac{s}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+4}]+$$
$$\frac{e^{-\pi s}}{3}[\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4}]$$

ולכן:

$$y(t)=\frac{1}{\pi}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)-\frac{1}{\pi}[H(t-\frac{\pi}{4})(t-\frac{\pi}{4})-H(t-\frac{\pi}{4})\frac{1}{2}\sin 2(t-\frac{\pi}{4})]-$$

$$\frac{1}{4}[H(t-\frac{\pi}{2})-H(t-\frac{\pi}{2})\cos 2(t-\frac{\pi}{2})]+\frac{1}{3}[H(t-\frac{\pi}{2})\cos(t-\frac{\pi}{2})-H(t-\frac{\pi}{2})\cos 2(t-\frac{\pi}{2})]+$$

$$\frac{1}{3}[H(t-\pi)\sin(t-\pi)-H(t-\pi)\frac{1}{2}\sin 2(t-\pi)]=$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\pi}(t-\frac{1}{2}\sin 2t) & 0\le t\le \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\pi}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)-\frac{1}{\pi}t+\frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}\cos 2t & \frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{2\pi}(\cos 2t+\sin 2t)-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{3}\cos 2t & \frac{\pi}{2}<t\le \pi \\ -\frac{1}{2\pi}(\cos 2t+\sin 2t)+\frac{1}{3}\sin t+\frac{1}{12}\cos 2t-\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t & \pi<t \end{cases}$$

$$y(t)=\begin{cases} \frac{1}{\pi}(t-\frac{1}{2}\sin 2t) & 0\le t\le \frac{\pi}{4} \\ -\frac{1}{2\pi}(\cos 2t+\sin 2t)+\frac{1}{4} & \frac{\pi}{4}<t\le\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2\pi}(\cos 2t+\sin 2t)+\frac{1}{12}\cos 2t+\frac{1}{3}\sin t & \frac{\pi}{2}<t\le \pi \\ -\frac{1}{2\pi}(\cos 2t+\sin 2t)+\frac{1}{12}\cos 2t-\frac{1}{6}\sin 2t & \pi<t \end{cases}$$

שאלה 6:

$$\lambda_1=1\Rightarrow\begin{cases} x_1=2x_3 \\ x_1=0\end{cases}\Rightarrow \overline{y}^1=e^t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_{2,3}=\pm i\Rightarrow x_1=x_2=-(i+1)x_3$$

$$r=e^{it}\begin{pmatrix}2\\2\\i-1\end{pmatrix}=(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix}2\\2\\i-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos t\\2\cos t\\-\sin t-\cos t\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}2\sin t\\2\sin t\\-\sin t+\cos t\end{pmatrix}$$

$$\overline{y}^2=\begin{pmatrix}2\cos t\\2\cos t\\-\sin t-\cos t\end{pmatrix};\quad \overline{y}^2=\begin{pmatrix}2\sin t\\2\sin t\\-\sin t+\cos t\end{pmatrix}$$

$$\overline{y}=C_1\overline{y}^1+C_2\overline{y}^2+C_3\overline{y}^3=\begin{pmatrix}2C_2\cos t+2C_3\sin t\\2C_1e^t+2C_2\cos t+2C_3\sin t\\C_1e^t-C_2(\sin t+\cos t)+C_3(\cos t-\sin t)\end{pmatrix}$$

$$2C_2'\cos t+2C_3'\sin t=0 \qquad (2)$$

$$2C_1'e^t+2C_2'\cos t+2C_3'\sin t=2e^t \qquad (3)$$

$$C_1e^t-C_2'(\sin t+\cos t)+C_3'(\cos t-\sin t)=e^t+1 (4)$$

מהמשוואות (2) ו-(3)

$$2C_1'e^t = 2e^t \Rightarrow C_1' = 1; C_1 = t$$
$$-C_2'(\sin t + \cos t) + C_3'(\cos t - \sin t) = 1$$
$$C_2' \sin t + C_3' \sin t = 0$$

$$-C_2' \sin t + C_3' \cos t = 1$$
$$C_2' \cos t + C_3' \sin t = 0$$

$$C_3 = \sin t; \quad C_2 = \cos t$$

$$\tilde{y} = C_1 \overline{y}^1 + C_2 \overline{y}^2 + C_3 \overline{y}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2te^t + 2 \\ te^t - 1 \end{pmatrix}$$

$$y = \overline{y} + \widetilde{y} = \begin{pmatrix} 2 + 2C_2 \cos t + 2C_3 \sin t \\ 2te^t - 1 + C_1 e^t + 2C_2 \cos t + 2C_3 \sin t \\ te^t - 1 + C_1 e^t - C_2(\sin t + \cos t) + C_3(\cos t - \sin t) \end{pmatrix}$$

התמרת לפלס

$$(1) \quad \mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad (s>0)$$

$$(2) \quad \mathcal{L}(e^{at})(s) = \frac{1}{s-a} \quad (s>a)$$

$$(3) \quad \mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s>0,\ n \text{ a positive integer})$$

$$(4) \quad \mathcal{L}(t^p)(s) = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \quad (s>0,\ p>-1)$$

$$(5) \quad \mathcal{L}(\sin(at))(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

$$(6) \quad \mathcal{L}(\cos(at))(s) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s>0)$$

$$(7) \quad \mathcal{L}(e^{at}\cdot\sin(bt))(s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad (s>a)$$

$$(8) \quad \mathcal{L}(e^{at}\cdot\cos(bt))(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad (s>a)$$

$$(9) \quad \mathcal{L}(\sinh(at))(s) = \frac{a}{s^2-a^2} \quad (s>|a|)$$

$$(10) \quad \mathcal{L}(\cosh(at))(s) = \frac{s}{s^2-a^2} \quad (s>|a|)$$

$$(11) \quad \mathcal{L}(t^n\cdot e^{at})(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (s>a,\ n \text{ a positive integer})$$

$$(12) \quad \mathcal{L}(t^n\cdot f(t))(s) = (-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\left(\mathcal{L}(f(t))\right)(s) \quad (n \text{ a positive integer})$$

$$(13) \quad \mathcal{L}((-t)^n\cdot f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))^{(n)}(s) \quad (n \text{ a positive integer})$$

$$(14) \quad \mathcal{L}(f'(t))(s) = s\mathcal{L}(f(t))(s)-f(0)$$

$$(15) \quad \mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n\mathcal{L}(f(t))(s)-s^{n-1}f(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0)$$

$$(16) \quad \mathcal{L}(H_c(t))(s) = \frac{e^{-cs}}{s} \quad (s>0)$$

$$(17) \quad \mathcal{L}(H_c(t)\cdot f(t-c))(s) = e^{-cs}\mathcal{L}(f(t))(s)$$

$$(18) \quad \mathcal{L}(H_c(t)\cdot f(t))(s) = e^{-cs}\mathcal{L}(f(t+c))(s)$$

$$(19) \quad \mathcal{L}(\delta(t-c))(s) = \mathcal{L}(\delta_c(t))(s) = e^{-cs}$$

$$(20) \quad \mathcal{L}(e^{ct}\cdot f(t))(s) = \mathcal{L}(f(t))(s-c)$$