תרגול 4
משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

משוואות ניתנות להורדת סדר

I. $y''=f(x) \Rightarrow y' = \int f(x)\,dx + C_1$

דוגמה 1 פתור: $y''=\cos^2 x$, $y'=1, y=0$ כאשר $x=0$

פתרון

$$y''=\cos^2 x \Rightarrow y' = \int \cos^2 x\,dx + C_1 = 0.5x + 0.25\sin 2x + C_1$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = 0.5x + 0.25\sin 2x + C_1 \\ y'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = 0.5\cdot 0 + 0.25\sin 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 1 \Rightarrow y' = 0.5x + 0.25\sin 2x + 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0.25x^2 - 0.125\cos 2x + C_2 \\ y(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_2 = 0.125 \Rightarrow \underline{y = 0.25x^2 - 0.125\cos 2x + 0.125}$$

II. $F(x,y',y'')=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y'=p(x) \\ F(x,p,p')=0 \end{array}\right.$

דוגמה 2 פתור: $x\,y''=y'+x$. המשוואה אינו כוללת את המשתנה התלוי y. ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה $y'=p(x)$

$$\left.\begin{array}{l} x\,y''=y'+x \\ y'=p(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x\,p' = p + x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p' = \dfrac{p}{x}+1 \\ x\neq 0 \end{array}\right\}$$ המשוואה ההומוגנית

$$\left.\begin{array}{l} p' = \dfrac{p}{x}+1 \\ \dfrac{p}{x}=t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x t' = 1 \Rightarrow t = \ln|x| + C_1 \Rightarrow p = x\ln|x| + C_1 x$$

$$\left.\begin{array}{l} p = x\ln|x| + C x \\ p = y' \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = \frac{x^2}{2}\ln|x| + C_1 x^2 + C_2}$$

III. $F(y,y',y'')=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y'=p(y) \\ F\left(y,p,p\dfrac{dp}{dy}\right)=0 \end{array}\right.$

דוגמה 3 פתור: $y\,y''+(y')^2+1=0$. המשוואה אינו כוללת את המשתנה הבלתי תלוי x. ניתן להוריד סדר של המשוואה ע"י הצבה $y'=p(y)$

$$y'=p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p$$

$$\left.\begin{array}{l} y\,y''+(y')^2+1=0 \\ y'=p(y) \end{array}\right\} \Rightarrow y\frac{dp}{dy}p + p^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{p}{p^2+1}dp + \dfrac{dy}{y} = 0 \\ y\neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5\ln|p^2+1|+\ln|y|=\ln|C_1| \quad \Rightarrow \sqrt{p^2+1}\cdot y=C_1 \Rightarrow p=\pm\frac{\sqrt{C_1{}^2-y^2}}{y}\Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{C_1{}^2-y^2}}{y}\Rightarrow \pm\frac{y}{\sqrt{C_1{}^2-y^2}}dy=dx\Rightarrow \mp\sqrt{C_1{}^2-y^2}=x+C_2\Rightarrow \underline{(x+C_2)^2+y^2=C_1{}^2}$$

האם $y=const$ פתרון ? לא , (בדוק!)

תרגילים

1) $y''=\sin x\cos x,\ y(0)=-1,\ y'(0)=0$

2) $y''\tan x=y'+1$

3) $y\,y''-(y')^2=y\,y'$

4) $y''(2y+3)-2(y')^2=0$

5) $y''(e^x+1)+y'=0$

6) $y''-2\,y\,y'=0,\ y(1)=0,\ y'(1)=4$

7) $y\,y''=(y')^2-(y')^3$

8) $y''+y'\tan x=\sin 2x$

9) $y'''=(y'')^2$

10) $y''+(y')^2=y,\ y(0)=1,\ y'(0)=1/\sqrt{2}$

11) $2y\,y''=(y')^2+1$

12) $t\,s''+s'+t=0$

13) $y\,y''-(y')^2=y^2y',\ y(0)=1,\ y'(0)=2$

14) $y''-2y'\cot x=\sin^3 x$

תשובות :

1) $y=0.25x-0.125\sin 2x-1$

2) $y=C_2-C_1\cos x-x$

3) $\ln\big|\ln|y|+C_1\big|=x+C_2,\ y=C$

4) $y=C_2\,e^{C_1x}-1.5$

5) $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$

6) $2+\arctan\frac{y}{2}=2x$

7) $C_2+y+C_1\ln|y|=x,\ y=C$

8) $y=C_1\sin x-x-0.5\sin 2x+C_2$

9) (רמז: $y''=z(x)$)
$y=-(x+C_1)\ln|x+C_1|+C_2x+C_3$

10) $y=\dfrac{(x+\sqrt{2})^2}{4}+\dfrac{1}{2}$

11) $C_1{}^2(x+C_2)^2=4(C_1y-1),\ y=C$

12) $s=C_1\ln|t|-0.25t^2+C_2$

13) $x=\ln\left|\dfrac{2y}{y+1}\right|$

14) $y=C_1\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin 2x}{4}\right)-\dfrac{1}{3}\sin^3 x+C_2$