משוואות דיפרנציאליות מסדר שני (המשך)

משוואות ליניאריות $y''+p(x)\,y'+g(x)\,y=f(x)$

I. משוואות ליניאריות הומוגניות $y''+p(x)\,y'+g(x)\,y=0$

אם y, y_2, y_1 פתרונות, אזי $Cy\,,\, y_2 \pm y_1$ גם פתרונות. $(C\in R)$

אם y_2, y_1 פתרונות בלתי תלוים ליניארית $\left(\frac{y_1}{y_2}\neq C\right)$, אזי $y=C_1y_1+C_2y_2$ פתרון כללי.

$(C, C_1, C_2 \in R)$

מנוסחת אוסטרוגרדסקי – לאיוביל $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C\,e^{-\int p(x)dx}$ מקבלים $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C\,e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2}$

<u>דוגמה</u> 1 פתור $x\,y''+2y'+x\,y=0$ כאשר נתון פתרון אחד $y_1=\frac{\sin x}{x}$

<u>פתרון</u>

$$x\,y''+2y'+x\,y=0 \Rightarrow y''+\frac{2}{x}y'+y=0 \Rightarrow \int p(x)dx=\int\frac{2}{x}dx=\ln(x^2)\Rightarrow e^{-\int p(x)dx}=\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{C\,e^{-\int p(x)dx}}{{y_1}^2} \Rightarrow \left(\frac{x}{\sin x}y_2\right)' = C\frac{x^2e^{-\int p(x)dx}}{\sin^2 x} \Rightarrow \frac{x}{\sin x}y_2=\int\frac{C\,dx}{\sin^2 x}=-C\cot x$$

$$\Rightarrow y_2=-C\frac{\cos x}{x}\Rightarrow y_2=\frac{\cos x}{x}\Rightarrow \quad \underline{\underline{y=\frac{C_1\sin x+C_2\cos x}{x}}}$$

II. משוואות ליניאריות לא הומוגניות $y''+p(x)\,y'+g(x)\,y=f(x)$

שיטת הווריאציה :

נניח ש- $y=C_1y_1+C_2y_2$ פתרון כללי למשוואה $y''+p(x)\,y'+g(x)\,y=0$ אזי פתרון כללי למשוואה $y''+p(x)\,y'+g(x)\,y=f(x)$ נחפש בצורה $y=M(x)\,y_1+N(x)\,y_2$ כאשר הפונקציות $M(x), N(x)$ ניתן לקבל מהמערכת

$$\left.\begin{aligned} M'\,y_1+N'\,y_2&=0\\ M'\,y_1'+N'\,y_2'&=f(x)\end{aligned}\right\}$$

<u>דוגמה</u> 2 פתור $x\,y''+2y'+x\,y=6\cos x$

<u>פתרון</u>

מדוגמה 1 מקבלים $y_1=\frac{\sin x}{x}\ ,\ y_2=\frac{\cos x}{x}$.

$$\left.\begin{aligned} &y''+2\frac{y'}{x}+y=\frac{6\cos x}{x}\\ &y_1=\frac{\sin x}{x}\ ,\ y_2=\frac{\cos x}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} &M'\frac{\sin x}{x}+N'\frac{\cos x}{x}=0\\ &M'\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}+N'\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}=\frac{6\cos x}{x}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &M'\sin x+N'\cos x=0\\ &M'(x\cos x-\sin x)+N'(-x\sin x-\cos x)=6\,x\cos x\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} M'&=6\cos^2 x\\ N'&=-6\cos x\sin x\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} M=3x+1.5\sin 2x+C_1 \\ N=1.5\cos 2x+C_2 \\ y=M\cdot\dfrac{\sin x}{x}+N\cdot\dfrac{\cos x}{x} \end{array}\right\}\Rightarrow y=(3x+1.5\sin 2x+C_1)\frac{\sin x}{x}+(1.5\cos 2x+C_2)\frac{\cos x}{x}\Rightarrow$$

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+\frac{(3x+3\sin x\cos x)\sin x+1.5(\cos^2 x-\sin^2 x)\cos x}{x}=$$

$$=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+\frac{3x\sin x+1.5\sin^2 x\cos x+1.5\cos^3 x}{x}=$$

$$=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}+3\sin x+\frac{1.5\cos x}{x}\Rightarrow \underline{\underline{y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_3\frac{\cos x}{x}+3\sin x}}$$

III. <u>משוואות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים</u> <u>$ay''+by'+cy=0$</u> $(a,b,c\in R)$

משוואה אופיינית $ar^2+br+c=0$

1) $r_1,r_2\in R \quad ,r_1\neq r_2\Rightarrow y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

2) $r_1,r_2\in R \quad ,r_1=r_2=r\Rightarrow y=C_1e^{rx}+C_2xe^{rx}$

3) $\alpha,\beta\in R, r_{1,2}=\alpha\pm\beta i\Rightarrow y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

<u>דוגמה</u> 3 פתור : $y''+4y'=0$

$$y''+4y'=0\Rightarrow r^2+4r=0\Rightarrow r_1=0, r_2=-4\Rightarrow y_1=e^{0\cdot x}=1, y_2=e^{-4x}\Rightarrow y=C_1+C_2e^{-4x}$$

<u>דוגמה</u> 4 פתור : $y''+4y'+4y=0$

$$y''+4y'+4y=0\Rightarrow r^2+4r+4=0\Rightarrow r_{1,2}=-2\Rightarrow y_1=e^{-2x}, y_2=xe^{-2x}\Rightarrow y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}$$

<u>דוגמה</u> 5 פתור : $y''+4y'+13y=0$

$$y''+4y'+13y=0\Rightarrow r^2+4r+13=0\Rightarrow r_{1,2}=-2\pm 3i\Rightarrow \alpha=-2, \beta=3\Rightarrow$$

$$y_1=e^{-2x}\cos 3x, y_2=e^{-2x}\sin 3x\Rightarrow y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$$

<u>דוגמה</u> 6 פתור : $y''''+25y''=0$

$$y''''+25y''=0\Rightarrow r^4+25r^2=0\Rightarrow r_{1,2}=0, r_{3,4}=\pm 5i\Rightarrow y_1=1, y_2=x, y_3=\cos 5x, y_4=\sin 5x$$

$$\Rightarrow y=C_1+C_2x+C_3\cos 5x+C_4\sin 5x$$

<u>דוגמה</u> 7 פתור : $y''''+18y''+81y=0$

$$y''''+18y''+81y=0\Rightarrow r^4+18r^2+81=0\Rightarrow (r^2+9)^2=0\Rightarrow r_{1,2,3,4}=\pm 3i\Rightarrow y_1=\cos 3x,$$

$$y_2=x\cos 3x, y_3=\sin 3x, y_4=x\sin 3x\Rightarrow y=C_1\cos 3x+C_2x\cos 3x+C_3\sin 3x+C_4x\sin 3x$$

משוואות ליניאריות לא הומוגניות $ay''+b\,y'+c\,y=f(x)$

שיטת השוואת המקדמים.

אם

$$f(x)=e^{\alpha x}\left(P_k(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\right),$$

$$P_k(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k,\quad Q_l(x)=b_0x^l+b_1x^{l-1}+\cdots+b_l$$

אזי נחפש פתרון פרטי למשוואה לא הומוגניות בצורה :

$$y_p(x)=e^{\alpha x}\left[(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)\cos\beta x+(B_0x^n+B_1x^{n-1}+\cdots+B_n)\sin\beta x\right]x^S$$

$$n=\max(k,l)$$

S הוא ריבוי של שורש $(\alpha+\beta i)$ למשוואה אופיינית $a\,r^2+b\,r+c=0$

$$1)\ \left.\begin{array}{r}\alpha=0,\beta=0\\ \alpha+\beta i=0\end{array}\right\},\ f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n\Rightarrow y_p=(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)\,x^S$$

$$2)\ \left.\begin{array}{r}\beta=0\\ \alpha+\beta i=\alpha\end{array}\right\},\ f(x)=e^{\alpha x}(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\Rightarrow y_p=e^{\alpha x}(A_0x^n+A_1x^{n-1}+\cdots+A_n)\,x^S$$

$$3)\ \left.\begin{array}{r}\alpha=0\\ \alpha+\beta i=\beta i\end{array}\right\},\ f(x)=P_k(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\Rightarrow y_p=(M_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x)\,x^S$$

דוגמה 8 $y''+3y'=e^{-3x}(8x\cos 4x+7\sin 4x)$

$$\left.\begin{array}{r}r_1=0,\ r_2=-3,\\ f(x)=e^{-3x}(8x\cos 4x+7\sin 4x)\Rightarrow\alpha+\beta i=-3+4i\end{array}\right\}\Rightarrow S=0,$$

$$n=1,\qquad y_p=e^{-3x}((Ax+B)\cos 4x+(Mx+D)\sin 4x)$$

דוגמה 9 $y''+2y'+2y=3e^{-x}\cos x$

$$\left.\begin{array}{r}r_{1,2}=-1\pm i,\\ f(x)=3e^{-x}\cos x\Rightarrow\alpha+\beta i=-1+i\end{array}\right\}\Rightarrow S=1,\ n=0\Rightarrow\quad y_p=e^{-x}(A\cos x+B\sin x)x$$

דוגמה 10 $y'''+9y'=8x+x^2e^{-x}-1$

$$f(x)=8x-x^2e^{-x}-1\Rightarrow f(x)=f_1(x)+f_2(x),\quad f_1(x)=8x-1,\quad f_2(x)=-x^2e^{-x}$$

$$y_p=y_{1p}+y_{2p}$$

$$\left.\begin{array}{r}r_1=0,\ r_{2,3}=\pm 3i,\\ f_1(x)=8x-1\Rightarrow\alpha+\beta i=0\end{array}\right\}\Rightarrow S=1,\ n=1\Rightarrow\quad y_{1p}=(Ax+B)x$$

$$\left.\begin{array}{r}r_1=0,\ r_{2,3}=\pm 3i,\\ f_2(x)=-x^2e^{-3x}\Rightarrow\alpha+\beta i=-3\end{array}\right\}\Rightarrow S=0,\ n=2\Rightarrow\quad y_{2p}=(Mx^2+Nx+D)e^{-3x}$$

תרגילים

I. פתור את המשוואות כאשר נתון פתרון אחד y_1

1) $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0 \ , \ y_1=x$ 2) $xy''+2y'-xy=0 \ , \ y_1=e^x/x$

II. פתור את המשוואות

1) $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$, עבור $x>0$ ידוע ש $y_1=\dfrac{1}{x}$ פתרון של המשוואה $x^2y''-3xy'-5y=0$

2) $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$. ידוע ש $y_1=\dfrac{1}{x-1}, y_2=\dfrac{1}{x+1}$ פתרונות של המשוואה $(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$

III. פתור את המשוואות

1) $2y''+5y'-3y=0$

2) $y''-8y'+16y=0 \, , y(0)=1, y'(0)=3$

3) $y''+2y'+5y=0$

4) $\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}=0$

5) $\dfrac{d^2s}{dt^2}+9s=0 \, , s(0)=2 \, , s'(0)=1$

6) $\dfrac{d^2r}{d\varphi^2}+10\dfrac{dr}{d\varphi}+25r=0$

7) $y''''+8y''+16y=0$

8) $y''''+16y=0$

9) $y'''+2y''-3y=0$

10) $y'''''+6y''''=0$

11) $y'''+8y=0$

IV. פתור את המשוואות

1) $y''+y=4xe^x$

2) $y''-5y'=3x^2+\sin 5x$

3) $y''+2y'+y=xe^{-x} \, , y(0)=1 \, , y'(0)=0$

4) $y''+4y=5\cos 2t$

5) $y''-9y=12e^{3t}-6\sin 3t$

6) $xy''-2xy'+xy=e^x$

7) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$

8) $y''''+4y''=6x+4+8e^{-2x}$

תשובות :

I

1) $y = C_1(x^2 - 1) + C_2\, x$

2) $y = (C_1 e^x + C_2\, e^{-x}) / x$

II

1) $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x^5 - \dfrac{1}{9} x^2 \ln x$

2) $y = \dfrac{C_1}{x-1} + \dfrac{C_2}{x+1} + x$

III

1) $y = C_1\, e^{-3x} + C_2\, e^{0.5x}$

2) $y = e^{4x}(1 - x)$

3) $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$

4) $x = C_1 + C_2\, e^{4t}$

5) $s = 2\cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t$

6) $r = (C_1 + C_2\, \varphi)e^{-5\varphi}$

7) $y = (C_1 + C_2\, x)\cos 2x + (C_3 + C_4\, x)\sin 2x$

8) $y = e^{\sqrt{2}\,x}\left(C_1 \cos(x\sqrt{2}) + C_2 \sin(x\sqrt{2})\right) +$
$+ e^{-\sqrt{2}\,x}\left(C_3 \cos(x\sqrt{2}) + C_4 \sin(x\sqrt{2})\right)$

9) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x\sqrt{3}) + C_4 \sin(x\sqrt{3})$

10) $y = C_1 + C_2\, x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5\, e^{-6x}$

11) $y = C_1\, e^{-2x} + e^x\left(C_2 \cos(x\sqrt{3}) + C_3 \sin(x\sqrt{3})\right)$

IV

1) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)\, e^x$

2) $y = C_1 + C_2 e^{5x} - 0.2x^3 - 0.12x^2 - 0.048x + 0.02(\cos 5x - \sin 5x)$

3) $y = e^{-x}\left(1 + x + x^3 / 6\right)$

4) $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + 1.25\, t \sin 2t$

5) $= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + 2te^{3t} + \dfrac{1}{3}\sin 3t$

6) $y = e^x (x \ln|x| + C_1 + C_2\, x)$

7) $y = (-x + C_1)\cos x + (\ln|\sin x| + C_2)\sin x$

8) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x + 0.25x^3 + 0.5x^2 + 0.25e^{-2x}$