

שאלות תאורטיות

1. יהיו שתי פונקציות $y_1(x)$, $y_2(x)$ פתרונות של המשוואה

$$y'' + x^3 y' + \sin(x)y = 0$$
 המקיימות גם את התנאי הבא $y_1(3) = y_2(3) = 0$ הוכח ש $y_1(x)$, $y_2(x)$ תלויות לינאריות
2. נתון שהפונקציה $y(x) = x^2$ היא פיתרון של המשוואה ההומוגנית

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$$
 מצא את הפתרון הכללי כאשר $x > 0$
3. נתון $y = cx^3 + \frac{1}{x}$ פתרון של המשוואה $y'' + p(x)y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$ מצא את $p(x)$, $f(x)$ ואת הפתרון הכללי של המשוואה
4. נתונה משוואה דיפרנציאלית (1) $y'' + py' + qy = g(x)$ כאשר פונקציות $g(x)$ רציפה ב R , p, q קבועים $p > 0, q > 0$ נניח ש $u(x)$, $v(x)$ פתרונות של (1) ב R צריך להוכיח

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (u(x) - v(x)) = 0$$
5. נתונה משוואה $y'' + 2\frac{y'}{x} + e^x y = 0$
 - (א) ידוע שהפונקציות y_1, y_2 הן פתרונות למשוואה הנ"ל כך ש $W_{y_1 y_2}(1) = 2$ יש לחשב את $W_{y_1 y_2}(5)$ בלי לפתור את המשוואה
 - (ב) האם הפונקציות $y_1 = x, y_2 = x^2$ יכולות להיות פיתרון למשוואה $y'' + q(x)y = 0$ כאשר ידוע ש $q(x)$ רציפה בכל R
6. צ"ל הפונקציות $y_1 = x^3 - x^2, y_2 = x^3 + x^2$ לא יכולות להיות הפתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ בקטע $[-1, 1]$ כאשר ידוע ש $p(x)$ ו $q(x)$ רציפות בקטע $[-1, 1]$
7. נניח שקיימים $y_1(x), y_2(x)$ פתרונות בלתי תלויים ליניארית של המשוואה

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$
 כאשר $p(x)$ ו $q(x)$ פונקציות רציפות ב R נניח ש $y_1(a) = y_1(b) = 0$ ו $a < b$ צ"ל שקיים c , כך ש $a < c < b$ ו $y_2(c) = 0$ (רמז להשתמש במשפט רול כדי להוכיח את הטענה בדרך השלילה)
8. נתון ששלוש הפונקציות $y_1 = x + 2, y_2 = x^2 - 1, y_3 = x^2 + x$ הן פתרונות של המשוואה הליניארית הלא הומוגנית מסדר שני, מצא את הפתרון הכללי של המשוואה
9. נתון כי $u(x)$ ו $v(x)$ פתרונות של המשוואה $u'' + p(x)u = 0$ ו $v'' + q(x)v = 0$ בהתאמה המקיימות את התנאים $u(a) = v(a) = 0$ (כאשר $q(x)$ ו $p(x)$ רציפות בקטע $[a, b]$) הוכח שוורונסקיאן של הפתרונות הנ"ל שווה ל

$$W_{u,v}(x) = \int_a^x [p(t) - q(t)] * u(t)v(t) dt$$
10. האם יתכן שהפונקציות

$$y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3$$
 הינן פתרונות של משוואה לא הומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \frac{2x^3}{(x^2-x)^2}$$

כאשר נתון ש $p(x)$ ו $q(x)$ רציפות בישר הממשי, אם כן מצא את $p(x)$ ו $q(x)$, אם לא נמק

11. יהיו פונקציות $a(x)$ ו $b(x)$ רציפות ב R ו $a(x)$ זוגית ו $b(x)$ אי זוגית הוכיחו כי פתרון של משוואה דיפר'

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

שמקיים את התנאי $y'(0) = 0$ הוא פונקציה זוגית

12. תן תנאי עבור $q(x)$ ו $p(x)$ כך שעבור המשוואה

$$y'' + p(x)y' - q(x)y = 0$$

קיימים שני פתרונות בת"ל y_1, y_2 כך ש

$$y_1(t)y_2(t) = 1$$