שאלות תאורטיות, פתרונות.

1. יהיו שתי פונקציות $y_1(x)$, $y_2(x)$ פתרונות של המשוואה

$$y'' + x^3 y' + sin(x)y = 0$$

המקיימות גם את התנאי הבא $y_1(3) = y_2(3) = 0$

הוכח ש $y_1(x)$, $y_2(x)$ תלויות לינאריות

- פתרון: $W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ ונשים לב שבנקודה x = 3 מתקיים $W(y_1(3), y_2(3)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ y_1'(3) & y_2'(3) \end{vmatrix} = 0$ ולמשוואות דיפרנציאליות עם מקדמים משתנים מספיק שבנקודה אחת W הוא 0 כדי להסיק ש $y_1(x), y_2(x)$ תלויים

2. נתון שהפונקציה $y(x) = x^2$ היא פיתרון של המשוואה ההומגנית

$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ מצא את הפתרון הכללי כאשר x>0

- פתרון: x>0 ולכן ניתן לכתוב $y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$, וכעת נמצא
- $y_2 = x^2 \int \frac{e^{\int \frac{3}{x}}}{x^4} dx = x^2 ln(x)$ ולכן הפיתרון הכללי הינו $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 ln(x)$

3. נתון $y = cx^3 + \frac{1}{x}$ פתרון של המשוואה $y'' + p(x)y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$ מצא את p(x) , ואת הפתרון הכללי של המשוואה f(x)

- פתרון: נקח $y_1 = x^3 - \frac{1}{x}$ ו $y_2 = 2x^3 - \frac{1}{x}$ פתרונות של המשוואה אז $y = y_1 - y_2 = x^3$ הוא פתרון של המשוואה $y'' + p(x)y' + \frac{12}{x^2}y = 0$, נציב ונמצא את p(x). $6x + p(x)3x^2 + \frac{12}{x^2}x^3 = 0 \leftarrow p(x)3x^2 = -18x \leftarrow p(x) = -\frac{6}{x}$, כעת נשים לב ש $y = \frac{1}{x}$ הוא פתרון של המשוואה $y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = f(x)$, נציב ונמצא את f(x), ולכן $\frac{2}{x^3} - \frac{6}{x}\frac{-1}{x^2} + \frac{12}{x^2}\frac{1}{x} = f(x) \leftarrow f(x) = \frac{20}{x^3}$. כעת נמצא את הפיתרון השני של המשוואה $y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = 0$, $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{-6}{x}}}{(y_1)^2} dx$ $\leftarrow y_2 = x^4$ ולכן הפיתרון הכללי הינו $y = c_1 x^3 + c_2 x^4 + \frac{1}{x}$

4. נתונה משוואה דיפרנציאלית (1) $y'' + py' + qy = g(x)$ כאשר פונקצית g(x) רציפה בR וp , q קבועים q>0 , p>0 נניח ש u(x) , וv(x) פתרונות של (1) בR צריך להוכיח $lim_{x\to\infty}(u(x) - v(x)) = 0$

- פתרון: מכיון ש u(x) , וv(x) פתרונות של (1) אז $h(x) = u(x) - v(x)$ הינו פיתרון של המשוואה ההומגנית $y''+py'+qy = 0$, נחשב פיתרון של המשוואה $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{-\lambda\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$ נחלק לשלושה מצבים

(א) $p^2 - 4q > 0$ ולכן $\lambda_{1,2} < 0$, ולכן הפיתרון הכללי הינו $y = c_1e^{\lambda_1 x} +$ $c_2e^{\lambda_2 x}$ ולכן ברור ש $lim_{x\to\infty}y = 0$ ולכן $lim_{x\to\infty}(u(x) - v(x)) = 0$
(ב) $p^2 - 4q = 0$ ולכן $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ולכן הפיתרון הכללי הינו $y = c_1e^{\lambda_1 x} +$ $c_2xe^{\lambda_1 x}$ ולכן ברור ש $lim_{x\to\infty}y = 0$ ולכן $lim_{x\to\infty}(u(x) - v(x)) = 0$
(ג) $p^2-4q < 0$ ולכן $\lambda_{1,2}$ מרוכבים ולכן הפיתרון הכללי הינו $y = e^{-\frac{p}{2}x}(c_1cos(x\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2})+$ $c_2sin(x\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}))$ ולכן ברור ש $lim_{x\to\infty}y = 0$ (משהו שואף ל0 כפול משהו חסום) ולכן $lim_{x\to\infty}(u(x) - v(x)) = 0$

5. נתונה משוואה $y'' + 2\frac{y'}{x} + e^x y = 0$

(א) ידוע שהפונקציות y_1 , y_2 הן פתרונות למשוואה הנ"ל כך ש $W_{y_1y_2}(1) = 2$ יש לחשב את $W_{y_1y_2}(5)$ בלי לפתור את המשוואה

- פתרון: נשים לב ש $W_{y_1y_2}(x) = ce^{-\int p(x)} = ce^{-\int\frac{2}{x}} = \frac{c}{x^2}$ ומכיון ש $W_{y_1y_2}(1) = 2$ אז $c\frac{2}{1^2} = 2$ נקבל c = 2. ולכן $W_{y_1y_2}(5) = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$

(ב) האם הפונקציות $y_1 = x$, $y_2 = x^2$ יכולות להוות פיתרון למשוואה $y'' + q(x)y = 0$ כאשר ידוע ש q(x) רציפה בכל R

- פתרון: מכיון ש $W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$ ולכן בנקודה 0 נקבל $W_{y_1y_2}(0) = 0$ ולכן הוורונסקיאן צריך להיות 0 בכל נקודה וזו סתירה לכך ש y_1 , y_2 יכולים להיות פתרונות

6. צ"ל הפונקציות $y_2 = x^3 + x^2$, $y_1 = x^3 - x^2$ לא יכולות להיות הפתרונות של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ בקטע $[-1,1]$ כאשר ידוע ש p(x) ו q(x) רציפות בקטע $[-1,1]$

- פתרון: מכיון ש = $W_{y_1,y_2}(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^3 - x^2 & x^3 + x^2 \\ 3x^2 - 2x & 3x^2 + 2x \end{vmatrix}$ $-2x^4$ ולכן $W_{y_1,y_2}(0) = -2(0)^4 = 0$ אך הפונקציות לא תלויות ליניארית בקטע ולכן זו סתירה לכך שy_1 , y_2 פתרונות של המשוואה

7. נניח שקיימים $y_1(x)$, $y_2(x)$ פתרונות בלתי תלויים לינארית של המשוואה

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר p(x) ו q(x) פונקציות רציפות בR נניח ש y_1(a) = y_1(b) = 0 a < b צ"ל שקיים c , כך ש a < c < b ו $y_2(c) = 0$ (רמז להשתמש במשפט רול כדי להוכיח את הטענה בדרך השלילה)

- פתרון: נניח בשלילה שלא קיים $a \leq$c$\leq$ b כך ש $y_2(c) = 0$, ולכן נוכל להגדיר $g(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ רציפה וגזירה בקטע [a , b] , ומכיון ש g(a) = g(b) = 0 , נוכל להפעיל את משפט רול ולקבל שקיים a <c< b כך ש $g'(c) = 0$ ולכן $y_1'(c)y_2(c) - y_1(c)y_2'(c) = 0$ ומכאן $W_{y_1y_2}(c) = 0$ אך זו סתירה לכך ש $y_1(x)$, $y_2(x)$ פתרונות בלתי תלויים לינארית של המשוואה , כעת נניח ש $y_2(a) = 0$ אך שוב נקבל $W_{y_1y_2}(a) = 0$, ובצורה דומה ל b ולכן קיים a <c< b כך ש $y_2(c) = 0$.

8. נתון ששלוש הפונקציות $y_3 = x^2 + x$, $y_2 = x^2 - 1$ $y_1 = x + 2$ הן פתרונות של המשוואה הליניארית הלא הומוגנית מסדר שני, מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

- פתרון: נשים לב ש $g_1(x) = y_3 - y_2 = x + 1$ הינו פיתרון של המשוואה ההומגנית, וגם $g_2(x) = y_3 - y_1 = x^2 - 2$הינו פיתרון של המשוואה ההומגנית, ובנוסף, הם אינם תלויים ליניארית ולכן הם פורשים את מרחב הפתרונות של המשוואה ההומגנית ולכן $y = c_1g_1(x) + c_2g_2(x) + y_1$ הינו הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית.

9. נתון כי u(x) ו v(x) פתרונות של המשוואה $u'' + p(x)u = 0$ ו $v'' + q(x)v = 0$ בהתאמה המקיימות את התנאים v(a) = u(a) = 0 (כאשר q(x) ו p(x) רציפות בקטע $[a, b]$) הוכח שוורונסקיאן של הפתרונות הנ"ל שווה ל

$$W_{u,v}(x) = \int_a^x [p(t) - q(t)] * u(t)v(t)dt$$

- פתרון: $\int_a^x [p(t) - q(t)] * u(t)v(t)dt = \int_a^x p(t) * u(t)v(t)dt - \int_a^x q(t) * u(t)v(t)dt$ ובנוסף $v'' = -q(x)v$ וגם $u'' = -p(x)u$ ולכן $\int_a^x [p(t) - q(t)] * u(t)v(t)dt = \int_a^x u''v(t)dt - \int_a^x v''u(t)dt$ נוכל לבצע אינטגרציה בחלקים ולכן $\int_a^x u''v(t)dt - \int_a^x v''u(t)dt = u'v \mid_a^x - \int_a^x u'v'dt - uv' \mid_a^x + \int_a^x v'u'dt = u'(x)v(x) - v'(x)u(x)$ ומכאן נקבל $W_{u,v}(x) = \begin{vmatrix} v(x) & u(x) \\ v'(x) & u'(x) \end{vmatrix} = u'v(x) - v'u(x)$ ולכן הראנו את מה שצריך להוכיח.

10. האם יתכן שהפונקציות

$$y_1 = x \; y_2 = x^2 \text{ , } y_3 = x^3$$

הינן פתרונות של משוואה לא הומוגנית

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \frac{2x^3}{(x^2-x)^2}$$

כאשר נתון ש p(x) ו q(x) רציפות בישר הממשי, אם כן מצא את p(x) ו q(x), אם לא נמק

- פתרון: נשים לב שניתן לכתוב את המשוואה כך $y''+p(x)y'+q(x)y = \frac{2x}{(x-1)^2}$ ולכן $y_1 - y_2$ פיתרון של המשוואה ההומגנית בקטע $(-\infty,1)$ וכך גם $y_1 - y_3$ אך מכיון ששתי המשוואות מתאפסות ב0 ואינן תלויות ליניארית נקבל סתירה לכך שהם פתרונות של המשוואה ההומגנית בקטע.

11. יהיו פונקציות a(x) ו b(x) רציפות בR ו a(x) זוגית ו b(x) אי זוגית הוכיחו כי פתרון של משוואה דיפ'

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

שמקיים את התנאי y'(0) = 0 הוא פונקציה זוגית

- פתרון: נסמן ב $y(-x)$ =: $h(x)$, נראה ש h(x) הינו פיתרון של המשוואה ההומוגנית ,

$h(x) := y(-x)$, $h'(x) = -y'(-x)$, $h''(x) = y''(-x)$ כעת נציב זאת במשוואה ונקבל

$h''(x)+a(x)h'(x)+b(x)h(x) = 0 \leftarrow\; = y''(-x)-a(x)y'(-x)+b(x)y(-x)$

$0 \leftarrow y''(-x)+a(-x)y'(-x)+b(-x)y(-x) = 0$ ולכן h באמת פתרון של המשוואה, ומכיון ש y(0) = h(0) וגם y'(0)= 0 = ¯y'(0) = h'(0) ולכן y וh פתרונות המקיימים את אותם תנאי התחלה ולכן לפי משפט הקיום והיחידות h=y ולכן y פונקציה זוגית.

12. תן תנאי עבור q(x) ו p(x) כך שעבור המשוואה

$$y'' + p(x)y' - q(x)y = 0$$

קיימים שני פתרונות בת"ל y_1 , y_2 כך ש

$y_1(t)y_2(t)$ = 1

- פתרון: נתון $y_2 = \frac{1}{y_1}$ נציב את y_2 במשוואה

$y_2' = \frac{-y_1'}{(y_1)^2}$ וגם $y_2'' = -\frac{y_1''(y_1)^2 - y_1' 2y_1 y_1'}{(y_1)^4} = \frac{-y''}{(y_1)^2} + \frac{2(y_1'')^2}{(y_1)^3}$ נציב את השוויונים במשוואה ונקבל

$$\frac{-y''}{(y_1)^2} - p(x)\frac{y_1'}{(y_1)^2} + \frac{y_1}{(y_1)^2}q(x) + \frac{2(y_1'')^2}{(y_1)^3} - \frac{2}{y_1}q(x) =$$

$$\Leftarrow \frac{-y''}{(y_1)^2} + \frac{2(y_1'')^2}{(y_1)^3} - p(x)\frac{y_1'}{(y_1)^2} + q(x)\frac{1}{y_1} =$$

$\Leftarrow$ ($\frac{-y''}{(y_1)^2} - p(x)\frac{y_1'}{(y_1)^2} + \frac{1}{y_1}q(x) = 0$ נשים לב ש)

(*) $\frac{(y_1'')^2}{(y_1)^2} = q(x) \leftarrow \frac{2(y_1'')^2}{(y_1)^3} - \frac{2}{y_1}q(x) = 0$

כמו כן $e^{-\int p(x)} = y_1\frac{-y_1'}{(y_1)^2} - \frac{y_1'}{y_1} = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = W_{y_1,y_2}(x) \leftarrow$

(בעזרת *) $e^{-2\int p(x)} = \frac{4(y_1'')^2}{(y_1)^2} = 4q(x)$ נגזור את שני הצדדים ונקבל

$4q'(x) = -2p(x)e^{-2\int p(x)} \leftarrow 0 = 4q'(x) + 2p(x)4q(x) \leftarrow$

$0 = q'(x) + 2p(x)q(x)$ וזהו תנאי מספיק