אוניברסיטת בן גוריון בנגב

תאריך הבחינה:
שם המרצה: פרופ' ולדימיר פונפ,ד"ר זלצמן טניה
מבחן ב: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מס' קורס: 201-1-9841
שנה: תשס"ג
מועד: ב' **סמסטר:** ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשב כיס עם מסך קטן

פתור 5 שאלות. כל שאלה 20 נקודות.

שאלות 3,4,5,6 הינן שאלות חובה.

אפשר לפתור את כל השאלות, הבודק יבחר את התשובה הטובה יותר מתוך התשובות 1,2

<u>שאלה מספר 1</u> מצא פתרון כללי ופתרונות מיוחדים (אם יש כאלה) של משוואה הבאה:

$$\frac{1}{x^2}+y^2\cdot y'=\left(\frac{1}{x}+y^3-1\right)^2 \qquad x>0,$$

<u>שאלה מספר 2</u>

פתור את המשוואה:
$$y'=\frac{2(1-\cos 2y)(x+2\sin y)}{(x^2+1)\cdot\sin 2y}$$

<u>שאלה מספר 3</u>

נתון כ' $y=e^{2x}$ הוא פתרון של משוואה הומוגנית. מצא פתרון כללי של משוואה לא-הומוגנית מתאימה:

$$xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=x^2e^{-x} \qquad x>0,$$

<u>שאלה מספר 4</u>

פתור את המשוואה: $y^{(4)}+5y''+4y=\sin x+3e^x$

<u>שאלה מספר 5</u>

פתור את המשוואה בעזרת התמרת לפלס:

$$f(x)=\begin{cases}72(1-t/\pi), & 0\le t\le\pi\\ 72\sin t, & \pi<t\le 2\pi\\ 0, & t>2\pi\end{cases} \quad , \quad y''+9y=f(x) \quad , \quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

בתשובה יש להציג פתרון בצורה:
$$y=\begin{cases}\dots & 0\le t\le\pi\\ \dots & \pi<t\le 2\pi\\ \dots & t>2\pi\end{cases}$$

<u>שאלה מספר 6</u>

פתור את מערכת המשוואות :
$$\begin{cases}x'=x-y-z+2\\ y'=x+y\\ z'=3x+z\end{cases}$$
.יש לקבל פתרון ממשי!

בהצלחה !

Elementary Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$		
1	$\frac{1}{p}$,	$p > 0$	(1)
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$,	$p > a$	(2)
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$,	$p > 0$	(3)
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$,	$p > 0$	(4)
$t^n,\ n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$,	$p > 0$	(5)
$t^q,\ q > -1$	$\frac{\Gamma(q+1)}{p^{q+1}}$,	$p > 0$	(6)
$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$,	$p > \|a\|$	(7)
$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$,	$p > \|a\|$	(8)
$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$,	$p > a$	(9)
$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$,	$p > a$	(10)
$t^n e^{at},\ n \in N$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$,	$p > a$	(11)
$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$,	$p > 0$	(12)
$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$,	$p > 0$	(13)
$\frac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^2}$,	$p > 0$	(14)
$H(t-c) = u_c(t)$	$\frac{e^{-cp}}{p}$,	$p > 0$	(15)
$u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cp}F(p)$,		(16)
$e^{ct}f(t)$	$F(p-c)$,		(17)
$f(ct)$	$\frac{1}{c}F(\frac{p}{c})$,	$c > 0$	(18)
$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$	$F_1(p)F_2(p)$		(19)
$\delta(t-c)$	e^{-cp},		(20)
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$		(21)
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$		(22)

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C$$

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$$

$x > 0$

(1) $\frac{1}{x^2} + y^2 \cdot y' = \left(\frac{1}{x} + y^3 - 1\right)^2$

$t = y^3 - 1 \,, \quad t' = 3y^2 \cdot y'$

$y^2 \cdot y' = \frac{t'}{3}$

$\frac{1}{x^2} + \frac{t'}{3} = \left(\frac{1}{x} + t\right)^2$

$\cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{t'}{3} = \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{2t}{x} + t^2$

$t' = \frac{6t}{x} + 3t^2 \quad \Big| : t^2 \qquad t \neq 0$

$\cancel{y' \neq 0}$ ~~או~~ $\cancel{y \neq 0}$

$y \neq 1$

$\frac{t'}{t^2} - \frac{6}{x} \cdot \frac{1}{t} = 3 \qquad \frac{1}{t} = z$

$-z' - \frac{6}{x} z = 3$

$z' + \frac{6}{x} z = -3 \qquad \mu(x) = x^6$

$(z \cdot x^6)' = -3x^6$

$z \cdot x^6 = -\frac{3x^7}{7} + c_1$

$z = -\frac{3x}{7} + \frac{c_1}{x^6}$

$\frac{1}{y^3 - 1} = -\frac{3x}{7} + \frac{c_1}{x^6} \quad , y \neq 1$

$y = 1$ — פתרון
מיוחד.

(2) $$y' = \frac{2(1-\cos 2y)\cdot(x+2\sin y)}{(x^2+1)\cdot\sin 2y}$$

$$2(1-\cos 2y)(x+2\sin y)\,dx - (x^2+1)\cdot\sin 2y\,dy = 0$$

$2\sin y :|$ $$4\cdot\sin^2 y\,(x+2\sin y)\,dx - (x^2+1)\cdot 2\sin y\cos y\,dy = 0$$

$$\underbrace{2\sin y\,(x+2\sin y)}_{M}\,dx \underbrace{-(x^2+1)\cos y}_{N}\,dy = 0$$

$$M'_y = 2x\cos y + 8\sin y\cdot\cos y = 2x\cos y + 4\sin 2y$$
$$N'_x = -2x\cos y$$

$$\frac{-M'_y + N'_x}{M} = f(y)$$

$$-\frac{4x\cos y + 4\sin 2y}{2\sin y(x+2\sin y)} = -\frac{4\cos y\,(x+2\sin y)}{2\sin y\,(x+2\sin y)} =$$
$$= -2\,\mathrm{ctg}\,y$$

$$(\ln\mu(y))' = -2\cdot\frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\mu(y) = e^{-2\int\frac{d(\sin y)}{\sin y}} = e^{-2\ln|\sin y|}$$

$$\mu(y) = \frac{1}{\sin^2 y}$$

$$\left[\frac{2}{\sin y}(x+2\sin y)\right]dx - \left[\frac{(x^2+1)\cdot\cos y}{\sin^2 y}\right]dy = 0$$

$$u'_x = \frac{2(x+2\sin y)}{\sin y}$$

$$u'_y = -\frac{(x^2+1)\cos y}{\sin^2 y} \longrightarrow u(x,y) = +\frac{(x^2+1)}{\sin y} + c(x)$$

$$u'_x = \frac{2x}{\sin y} + c'(x) = \frac{2x}{\sin y} + 4$$

$$c(x) = 4x$$

$$u = \boxed{\frac{(x^2+1)}{\sin y} + 4x = \mathrm{const}}\ ;$$

(3) $x>0$

$$xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=x^2e^{-x}$$

$$y_1=e^{2x}$$

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & y \\ 2e^{2x} & y' \end{vmatrix} = c_1 e^{\int \frac{x+1}{x}dx} = c_1 e^{x+\ln x} = c_1 x e^{x}$$

$$e^{2x}\cdot y' - 2e^{2x}y = c_1 x e^{x}$$

$$y'-2y=c_1 x e^{-x} \qquad \mu(x)=e^{-2x}$$

$$(y\cdot e^{-2x})' = c_1 x e^{-3x}$$

$$\left[\int x e^{-3x}dx = \int x\frac{d(e^{-3x})}{-3} = -\frac{1}{3}\left(xe^{-3x}-\int e^{-3x}dx\right) = -\frac{1}{3}\left(xe^{-3x}+\frac{e^{-3x}}{3}\right)+c_2\right.$$

$$y\cdot e^{-2x} = c_1\left(xe^{-3x}+\frac{e^{-3x}}{3}\right)+c_2$$

$$\boxed{y_h = c_1 e^{-x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+c_2 e^{2x}}$$

משוואה לא הומוגנית:

$$y_p = c_1(x)\,e^{-x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+c_2(x)\,e^{2x}$$

$$\begin{cases} c_1' e^{-x}\left(x+\frac{1}{3}\right)+c_2' e^{2x}=0 & \longrightarrow\ c_2' = -c_1' e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right) \\ c_1' e^{-x}\left(-x-\frac{1}{3}+1\right)+2c_2' e^{2x} = xe^{-x} \end{cases}$$

$$c_1' e^{-x}\left(-x+\frac{2}{3}\right)-2c_1' e^{-3x}\left(x+\frac{1}{3}\right)e^{2x} = xe^{-x} \quad \Big|: e^{-x}$$

$$c_1'\left(-x+\frac{2}{3}-2x-\frac{2}{3}\right)=x \quad ; \quad -3x\,c_1' = x$$

$$c_1' = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{c_1 = -\frac{x}{3}}$$

③ המשך

$$c_2' = \frac{1}{3} e^{-3x} \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$c_2 = \int \left(x + \frac{1}{3}\right) d\,\frac{\left(e^{-3x}\right)}{-9} = -\frac{1}{9}\left(e^{-3x} \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) - \int e^{-3x}\,dx \right) =$$

$$= -\frac{1}{9}\left(e^{-3x}\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{e^{-3x}}{3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{9} x e^{-3x} - \frac{2}{27} e^{-3x} = \boxed{-\frac{e^{-3x}}{9}\left(x + \frac{2}{3}\right)}$$

$$y_p = -\frac{x}{3} e^{-x}\left(x + \frac{1}{3}\right) - \frac{e^{-x}}{9}\left(x + \frac{2}{3}\right) =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{3}\left(x\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\right)\right) = \boxed{-\frac{e^{-x}}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right)}$$

$$y_{\text{כללי}} = c_1 e^{-x}\left(x + \frac{1}{3}\right) + c_2 e^{2x} - \frac{e^{-x}}{3}\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\right).$$

④ $y^{(4)}+5y''+4y=\sin x+3e^{x}$

:הומוגנית

$r^4+5r^2+4=0$

$(r^2+1)(r^2+4)=0$

$r=\pm i,\ r=\pm 2i$

$$y_h=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x$$

:לא הומוגנית

א) $y_p=(a\sin x+b\cos x)\cdot x=ax\sin x+bx\cos x$

$y_p'=a\sin x+ax\cos x+b\cos x-bx\sin x=$

$=\sin x(a-bx)+\cos x(ax+b)$

$y_p''=\cos x(a-bx)-b\sin x-\sin x(ax+b)+a\cos x=$

$=\cos x(2a-bx)+\sin x(-2b-ax)$

$y_p'''=-\sin x(2a-bx)-b\cos x-a\sin x+\cos x(-2b-ax)=$

$=\sin x(-3a+bx)+\cos x(-3b-ax)$

$y_p^{(IV)}=\cos x(-3a+bx)+b\sin x-\sin x(-3b-ax)-a\cos x=$

$=\cos x(-4a+bx)+\sin x(4b+ax)$

:הצבה

$\cos x(-4a+bx)+\sin x(4b+ax)+5\cos x(2a-bx)+5\sin x\cdot$

$\cdot(-2b-ax)+4ax\sin x+4bx\cos x=\sin x$

$\left.\begin{array}{l}\cos x(-4a+\cancel{bx}+10a-\cancel{5bx}+\cancel{4bx})=0\\ \sin x(4b+\cancel{ax}-10b-\cancel{5ax}+\cancel{4ax})=\sin x\end{array}\right\}$ $\quad a=0,\ b=-\frac{1}{6}$

$$\boxed{y_{p1}=-\frac{1}{6}x\cos x}$$

ב) $y_{p2}=ae^x \qquad y_{p2}'=y_{p2}''=y_{p2}'''=y_{p2}^{(IV)}=ae^x$

$e^x(a+5a+4a)=3e^x \qquad a=0.3$

$$\boxed{y=c_1\cos x+c_2\sin x+c_3\cos 2x+c_4\sin 2x-\frac{1}{6}x\cos x+\frac{3}{10}e^x}$$

(5) $y'' + 9y = \begin{cases} 72(1 - t/\pi) & 0 \le t \le \pi \\ 72 \sin t & \pi < t \le 2\pi \\ 0 & t > 2\pi \end{cases}$

$y(0) = 0, y'(0) = 1$

$f(x) = 72\,(1 - t/\pi) \cdot (1 - u_\pi) + (u_\pi - u_{2\pi}) \cdot 72 \sin t =$

$= 72(1 - t/\pi) + \frac{72}{\pi}(t - \pi) \cdot u_\pi + \underline{72\, u_\pi \sin((t-\pi) + \pi)} -$

$- 72\, u_{2\pi} \sin((t - 2\pi) + 2\pi) =$

$= \underline{72 - \frac{72}{\pi} \cdot t + \frac{72}{\pi} u_\pi (t - \pi) - 72\, u_\pi \sin(t - \pi) -}$

$\underline{- 72\, u_{2\pi} \sin(t - 2\pi)}$

$s^2 F(s) - s y(0) - y'(0) + 9 F(s) = \frac{72}{s} - \frac{72}{\pi} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{72}{\pi} \frac{e^{-\pi s}}{s^2}$

$+ \frac{72}{\cancel{\pi}} e^{-\pi s} \cdot \frac{1}{s^2+1} - 72\, e^{-2\pi s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$

$F(s)(s^2+9) = 1 + \frac{72}{s} - \frac{72}{\pi} \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{72(-e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})}{s^2+1}$

$F(s) = \frac{1}{s^2+9}$ (1) $+ 72 \cdot \frac{1}{s(s^2+9)}$ (2) $- \frac{72}{\pi} \frac{1 - e^{-\pi s}}{s^2(s^2+9)}$ (3) $+$

$+ \frac{72(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})}{(s^2+1)(s^2+9)}$ (4) .

(1) $y(t) = \frac{1}{3} \sin 3t$

(2) $\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+9}$

$A(s^2+9) + (Bs + C)s = 1$

$s = 0$	$A = \frac{1}{9}$
s^2:	$A + B = 0 \quad B = -\frac{1}{9}$
s^1	$C = 0$

$\frac{72}{s(s^2+9)} = \frac{8}{s} - \frac{8s}{s^2+9}$

(5) $\quad$ pers

$$y(t) = 8 - 8\cos 3t$$

(3) $$\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9}\right)$$

$$-\frac{72}{\pi}\ \frac{1-e^{-\pi s}}{s^2(s^2+9)} = -\frac{1-e^{-\pi s}}{\pi}\left(\frac{8}{s^2} - \frac{8}{s^2+9}\right)$$

$$y(t) = -\frac{1}{\pi}\left(8t - \frac{8}{3}\sin 3t\right) + \frac{u_\pi}{\pi}\left(8(t-\pi) - \frac{8}{3}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot \sin(3(t-\pi))\right) =$$

(4) $$\frac{72}{(s^2+1)(s^2+9)} = 9\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right) \longrightarrow$$
$$9\sin t - \frac{1}{3}\sin 3t$$

$$y(t) = u_\pi\left(9\sin(t-\pi) - \frac{1}{3}\sin 3(t-\pi)\right) -$$
$$- u_{2\pi}\left(9\sin(t-2\pi) - \frac{1}{3}\sin 3(t-2\pi)\right) =$$
$$= u_\pi\left(-9\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t\right) - u_{2\pi}\left(9\sin t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sin 3t + 8 - 8\cos 3t - \frac{8}{\pi}t + \frac{8}{3\pi}\sin 3t & 0 \le t \le 2\pi \\[2ex] \frac{1}{3}\sin 3t + \cancel{8} - 8\cos 3t \cancel{- \frac{8}{\pi}t} + \frac{8}{3\pi}\sin 3t + \\ + \frac{1}{\pi}\left(\cancel{8(t-\pi)} + \frac{8}{3}\sin 3t\right) - 9\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t = \\ = \frac{2}{3}\sin 3t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t - 8\cos 3t - 9\sin t & \pi < t \le 2\pi \\[2ex] \frac{2}{3}\sin 3t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t - 8\cos 3t - 9\sin t - 9\sin t + \\ + \frac{1}{3}\sin 3t = \sin 3t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t - 18\sin t - 8\cos 3t & t > 2\pi \end{cases}$$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (1-\lambda) + (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 1\right) =$$

$$= (1-\lambda)\,(3 + 2 - 2\lambda + \lambda^2) = (1-\lambda)\,(\lambda^2 - 2\lambda + 5)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ $\quad -y - z = 0$, $x = 0$, $y = -z$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 1 + 2i}$ $\begin{pmatrix} \cancel{-2i} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \\ 1 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & -2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ $\quad \begin{cases} x - 2iy = 0 \\ 3x - 2iz = 0 \end{cases}$

$x = 2i$

$y = 1$

$z = 3$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_1 = e^{t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x}_{2,3} = e^{t}(\cos 2t + i \sin 2t)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\underline{x}_2 = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\sin 2t\right)$$

$$\underline{x}_3 = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\sin 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t\right)$$

(6) פתרון

$$\underline{X}_h = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t\, e^{t} & 2\cos 2t\, e^{t} \\ e^{t} & \cos 2t\, e^{t} & \sin 2t\, e^{t} \\ -e^{t} & 3\cos 2t\, e^{t} & 3\sin 2t\, e^{t} \end{pmatrix}}_{M(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

מע' לא הומוגנית:

$$\overline{X}_p = M(t)\cdot \overline{C}(t)$$

$$M(t)\cdot \overline{C}'(t) = \overline{g}(t)$$

$$\begin{cases} -2c_2'\sin 2t\, e^{t} + 2c_3'\cos 2t\, e^{t} = 2 & |:2 \\ c_1' e^{t} + c_2'\cos 2t\, e^{t} + c_3'\sin 2t\, e^{t} = 0 & \cdot 3 \\ -c_1' e^{t} + 3c_2'\cos 2t\, e^{t} + 3c_3'\sin 2t\, e^{t} = 0 & - \end{cases}$$

$$4c_1' e^{t} = 0 \Rightarrow c_1' = 0 \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$$

$$(1)\cdot\cos 2t + (2)\cdot\sin 2t = c_3'\cdot e^{t} = \cos 2t$$

$$c_3' = e^{-t}\cdot\cos 2t$$

$$c_3 = -\frac{1}{5}\cos 2t\, e^{-t} + \frac{2}{5}\sin 2t\, e^{-t} = \boxed{\frac{e^{-t}}{5}(-\cos 2t + 2\sin 2t)}$$

$$c_2' = -c_3'\cdot\frac{\sin 2t}{\cos 2t} = -e^{-t}\cdot\sin 2t$$

$$\boxed{c_2 = \frac{e^{-t}}{5}(\sin 2t + 2\cos 2t)}$$

$$\overline{X}_p = \begin{pmatrix} 0 & -2\sin 2t\, e^{t} & 2\cos 2t\cdot e^{t} \\ e^{t} & \cos 2t\cdot e^{t} & \sin 2t\cdot e^{t} \\ -e^{t} & 3\cos 2t\cdot e^{t} & 3\sin 2t\cdot e^{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-t}}{5}(\sin 2t + 2\cos 2t) \\ \frac{e^{-t}}{5}(-\cos 2t + 2\sin 2t) \end{pmatrix}$$