אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 07.08.07
שם המורים: פרופ' פונפ, ד"ר אוכלוב,
ד"ר גולקו, פרופ' יזקסון, ד"ר זלצמן
מבחן ב: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מס' הקורס 201-19841
סמסטר ב מועד ב
משך הבחינה- 3 שעות, חומר עזר: דף נוסחאות, מחשבון

יש לענות על 5 מתוך 6 שאלות (כל שאלה שווה ל- 20 נקודות).

1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $xyy' = \dfrac{x^2}{\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)} + y^2$

2. פתור את המשוואה: $y' = -\dfrac{3x+6e^{-y}+4x^2y^2}{2x^3y-3xe^{-y}}$ **כאשר** $x>0$.

3. פתור את הבעיית קושי: $y'\cdot y''' - (y'')^2 - (y')^4 + y\cdot(y')^3 + 2(y')^3 = 0$
כאשר $y(0)=0,\ y'(0)=2,\ y''(0)=2$.

4. א) יהיו שתי פונקציות $y_1(x)$ **ו-** $y_2(x)$ **פתרונות של המשוואה**
$$y'' + x^3y' + \sin x\cdot y = 0$$
המקיימות גם התנאים הבאים $y_1(3)=y_2(3)=0$.
הוכח כי $y_1(x)$ **ו-** $y_2(x)$ **תלויות ליניארית.** **(12 נק')**

ב) נתון שהפונקציה $y(x)=x^2$ **היא פתרון של המשוואה ההומוגנית**
$x^2y''-3xy'+4y=0$. **מצא את הפתרון הכללי של המשוואה כאשר** $x>0$.
(8 נק')

5. פתור בעזרת התמרת לפלס:

$$y''+9y=\begin{cases}1 & 0\le t<\pi/2\\ \sin t & \pi/2\le t<\pi\\ 0 & t\ge\pi\end{cases}\qquad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

6. פתור את המערכת משוואות הלא הומוגניות:
$$\begin{cases}x'=y+z+1\\ y'=x+y+e^t\\ z'=z-x\end{cases}$$

בהצלחה!

מועד ב' 07.08.07

פתרונות

(1)

$$xyy' = \frac{x^2}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)} + y^2 \quad \Big| : x^2$$

$$\frac{y}{x} \cdot y' = \frac{1}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

משוואה הומוגנית;

$$t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

$$t\,(t'x + t) = \frac{1}{\cos t} + t^2$$

$$t \cdot t'x = \frac{1}{\cos t}$$

$$t \cdot \cos t \, dt = \frac{dx}{x}$$

$$\int t \cos t \, dt = \int t \, d(\sin t) = t \sin t - \int \sin t \, dt =$$

$$= t \sin t + \cos t + C$$

$$t \sin t + \cos t = \ln|x| + C$$

$$\boxed{\frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x} = \ln|x| + C}$$

$x>0, \quad y' = -\dfrac{3x+6e^{-y}+4x^2y^2}{2x^3y-3xe^{-y}}$ (2)

$$\underbrace{(3x+6e^{-y}+4x^2y^2)}_{M}dx+\underbrace{(2x^3y-3xe^{-y})}_{N}dy=0$$

$$M'_y=-6e^{-y}+8x^2y \qquad M'_y\neq N'_x$$
$$N'_x=6x^2y-3e^{-y}$$

נחפש גורם אינטגרציה:

$\mu(x):$

$$\frac{M'_y-N'_x}{N}=\frac{-6e^{-y}+8x^2y-6x^2y+3e^{-y}}{x(2x^2y-3e^{-y})}=$$

$$=\frac{2x^2y-3e^{-y}}{x(2x^2y-3e^{-y})}=\frac{1}{x} \Rightarrow$$ קיים גורם אינטגרציה $\mu(x)$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$$

$$\underbrace{(3x^2+6e^{-y}x+4x^3y^2)}_{M}dx+\underbrace{(2x^4y-3x^2e^{-y})}_{N}dy=0$$

משוואה מדויקת:

$$\begin{cases}u'_x=3x^2+6e^{-y}x+4x^3y^2\\ u'_y=2x^4y-3x^2e^{-y}\end{cases}$$

$$u(x,y)=x^3+3e^{-y}x^2+x^4y^2+c(y)$$

$$u'_y=-3e^{-y}x^2+2x^4y+c'(y)=N=2x^4y-3x^2e^{-y}$$

$$c'(y)=0 \Rightarrow c(y)=\text{const}$$

פתרון:

$$\boxed{x^3+3e^{-y}x^2+x^4y^2=c}$$

3

$$y'y''' - y''^2 - y'^4 + yy'^3 + 2y'^3 = 0 \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = 2 \end{cases}$$

$$y' = p(y), \quad y'' = p'p, \quad y''' = p''p^2 + p'^2 p$$

$$p(p''p^2 + p'^2 p) - p'^2 p^2 - p^4 + yp^3 + 2p^3 = 0$$

$$p''p^3 - p^4 + yp^3 + 2p^3 = 0 \qquad \underline{p \neq 0} \qquad |: p^3$$

$p = y' \equiv 0$

$y = ax + b$

$y'' \equiv 0 \quad (y''(0) = -2)$

$$p'' - p = -y - 2$$

$$p'' - p = 0$$

$$k^2 - 1 = 0, \quad k = \pm 1$$

$$p_1 = C_1 e^y + C_2 e^{-y}$$

$$\tilde{p} = ay + b, \quad \tilde{p}'' = 0 \qquad -ay - b = -y - 2$$

$$a = 1, \quad b = 2$$

$$\tilde{p} = y + 2$$

$$p = C_1 e^y + C_2 e^{-y} + y + 2$$

$$y'' = \underbrace{p'}_{\frac{dp}{dy}} \cdot p = p_1' y' = (C_1 + C_2 + 1)2 = 2$$

$x = 0 \quad p(\underset{=0}{y(0)}) = y'(0) = 2.$

$$C_1 + C_2 + \cancel{2} = \cancel{2} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$$

$$y''(0) = p'(0)\,y'(0) = (C_1 - C_2 + 1)2 = 2$$

$$C_1 - C_2 = 0$$

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$p = y + 2 = y' \qquad \int \frac{dy}{y+2} = \int dx$$

$$\ln|y+2| = \ln|ce^x|$$

$$y + 2 = ce^x \qquad x = 0 \Rightarrow c = 2; \quad \boxed{y = 2e^x - 2}$$

א. יהיו שתי פונקציות $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ פתרונות של משוואה

$$y''+x^3y'+\sin x\, y=0$$

המקיימות תנאים $y_1(3)=y_2(3)=0$

הוכח, כי $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$ תלויים ליניארית.

$$W=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$$

בנקודה מסוימת $x=3$

$$W(y_1(3),y_2(3)) = \begin{vmatrix}0 & 0\\ y_1'(3) & y_2'(3)\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$ $y_1(x), y_2(x)$ תלויים

למשוואות דיפרנציאליות עם מקדמים משתנים מספיק, שבנקודה אחת ה- $W=0$, כדי להגיד, שפונקציות תלויות ליניארית.

ב. נתון, שהפונקציה $y_1(x)=x^2$ היא פתרון פרטי של משוואה:

$$x^2y''-3xy'+4y=0$$

מצא את הפתרון הכללי של משוואה, כאשר $x>0$.

$$y''-\frac{3}{x}y'+\frac{4}{x^2}y=0$$

$$y_2=x^2\int\frac{e^{-\int-\frac{3}{x}dx}}{(x^2)^2}dx=x^2\int\frac{e^{3\ln x}}{x^4}dx=x^2\ln x$$

$$y=c_1x^2+c_2x^2\ln x$$

$$y'' + 9y = f(t) \qquad y(0)=0$$
$$y'(0) = 1$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} \le t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

$$L[y'' + 9y] = L[f(t)]$$
$$L[y''] + 9L[y] = L[f(t)]$$
$$s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + 9L[y] = L[f(t)]$$
$$L[y](s^2+9) = L[f(t)] + 1$$
$$L[y] = \frac{L[f(t)]}{s^2+9} + \frac{1}{s^2+9}$$

$$f(t) = (u_0 - u_{\frac{\pi}{2}}) \cdot 1 + (u_{\frac{\pi}{2}} - u_{\pi}) \sin t + u_{\pi} \cdot 0 =$$

$$= u_0 - u_{\frac{\pi}{2}} + u_{\frac{\pi}{2}} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{\cos(t-\frac{\pi}{2})} + u_{\pi} \underbrace{\sin t}_{-(-\sin(t-\pi))}$$

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha$$

$$L[f(t)] = L[u_0] - L[u_{\frac{\pi}{2}}] + L[u_{\frac{\pi}{2}} \cos(t - \frac{\pi}{2})] +$$
$$+ L[u_{\pi} \sin(t-\pi)] = \frac{1}{s} - e^{-\pi/2 s} \cdot \frac{1}{s} + e^{-\pi/2 s} \cdot \frac{s}{s^2+1}$$
$$+ e^{-\pi s} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$L[y] = \frac{1}{s(s^2+9)} - e^{-\pi/2 s} \frac{1}{s(s^2+1)} + e^{-\pi/2 s} \frac{s}{(s^2+1)(s^2+9)} +$$
$$+ e^{-\pi s} \cdot \frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{1}{s^2+9}$$

$$\frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right)$$

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right)$$

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{1}{8}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+9}\right)$$

$$L[y] = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right) - e^{-\pi/2\, s}\frac{1}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right) +$$

$$+ e^{-\pi/2\, s}\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+9}\right) + e^{-\pi s}\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}\right) +$$

$$+ \frac{1}{s^2+9}$$

$$y = \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t - \frac{1}{9} u_{\pi/2}\left(1 - \cos 3(t-\pi/2)\right) +$$

$$+ \frac{1}{8} u_{\pi/2}\left(\cos(t-\pi/2) - \cos 3(t-\pi/2)\right) + \frac{1}{8} u_{\pi}\left(\sin(t-\pi) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\sin 3(t-\pi)\right) + \frac{1}{3}\sin 3t$$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t, & 0 \le t < \pi/2 \\ \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{72}\sin 3t + \frac{1}{8}\sin t, & \pi/2 \le t < \pi \\ \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{72}\sin 3t + \frac{1}{24}\sin 3t, & t \geq \pi \end{cases}$$

5

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} \le t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \left(1 - H(t-\tfrac{\pi}{2})\right) + \left(H(t-\tfrac{\pi}{2}) - H(t-\pi)\right)\sin t =$$

$$= 1 - H(t-\tfrac{\pi}{2}) + H(t-\tfrac{\pi}{2}) \overset{=\cos(t-\frac{\pi}{2})}{\sin t} - H(t-\pi) \overset{=-\sin(t-\pi)}{\sin t} =$$

$$= 1 - H(t-\tfrac{\pi}{2}) + H(t-\tfrac{\pi}{2})\cos(t-\tfrac{\pi}{2}) + H(t-\pi)\sin(t-\pi)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p} + e^{-\frac{\pi}{2}p}\frac{p}{p^2+1} + e^{-\pi p}\frac{1}{p^2+1}$$

$$y'' + 9y = f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t, & \frac{\pi}{2} \le t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 1$$

$$p^2 F(p) - 1 + 9F(p) = (p^2+9)F(p) - 1$$

$$F(p) = \frac{1}{p^2+9} + \frac{1}{p(p^2+9)} - e^{-\frac{\pi}{2}p}\frac{1}{p(p^2+9)} +$$

$$+ e^{-\frac{\pi}{2}p}\frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)} + e^{-\pi p}\frac{1}{(p^2+1)(p^2+9)}$$

$$\frac{1}{p(p^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+9}\right)$$

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+9)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+9}\right)$$

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)} = \frac{1}{8}\left(\frac{p}{p^2+1} - \frac{p}{p^2+9}\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{9}(1 - \cos 3t) -$$

$$-\frac{1}{9}H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \cos 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{8}H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right) -\right.$$

$$\left.- \cos 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{8}H(t-\pi)\left(\sin(t-\pi) - \frac{1}{3}\sin 3(t-\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\sin 3t - \frac{1}{9}\cos 3t +$$

$$+ H\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{72}\sin 3t + \frac{1}{8}\sin t\right)$$

$$+ H(t-\pi)\left(-\frac{1}{8}\sin t + \frac{1}{24}\sin 3t\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$ ⑥

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ \underline{-1} & \underline{0} & \underline{1-\lambda} \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -1(\lambda - 1) + (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - \lambda - 1) = (1-\lambda)(1 + \lambda^2 - \lambda - 1) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda - 1)$$

$\lambda_1 = 0 \qquad s = 1 \qquad$ (S-ריבוי)

$\lambda_2 = 1 \qquad s = 2$

$$(A - \lambda_i I)\bar{v}_i = 0$$

$\underline{\lambda_1 = 0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_2 = -x_3$

$x_1 = -x_2$

$x_2 + x_3 = 0$

$x_1 + x_2 = 0$

$x_2 = 1$

$x_3 = -1$

$x_1 = -1$

$$\underline{V}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^{0t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$x_1 = 0$

$x_2 = -x_3$

$x_3 = 1, \ x_2 = -1$

$$\underline{x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\underline{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_3 = V_2 t + \tilde{V}_2$$

$(A - \lambda I) \cdot \underline{P} = \underline{V_2}$

חסר עוד וקטור P : $\quad (A - \lambda_i I)\tilde{V}_2 = V_2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_1 = -1$

$1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_2 = 0, \ x_3 = -1$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \underline{x_2} = e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$-x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$x_2 + x_3 = -1$

$$\underline{X}_h = c_1\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{0\cdot t} + c_2\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}e^t + c_3 e^t\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}t+\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \text{[illegible]} =$$

⑥

$$= \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 0 & -e^t\\ 1 & -e^t & -te^t\\ -1 & e^t & e^t(t-1)\end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

$$\underline{X}_p = M\cdot\bar{c}(t)$$

פתרון פרטי:

$$M\cdot\bar{c}'(t) = \bar{g}(t)$$

$$\sum c_i e^{\lambda_i t}\bar{V}_i$$

$$\begin{cases} -c_1' + c_3'e^t = 1\\ c_1' - c_2'e^t - te^tc_3' = e^t\\ -c_1' + c_2'e^t + c_3'e^t(t-1) = 0\end{cases}$$

$$(2)+(3):\quad -c_3'e^t = e^t \Rightarrow c_3' = -1$$

$$\boxed{c_3(t) = -t+\tilde{c}_3}$$

$$(1):\quad c_1' = -c_3'e^t - 1 = e^t - 1$$

$$\boxed{c_1(t) = e^t - t + \tilde{c}_1}$$

$$(2):\quad \cancel{e^t} - 1 - c_2'e^t + te^t = \cancel{e^t}$$

$$-c_2'e^t = -te^t + 1$$

$$c_2' = t - e^{-t} \Rightarrow \boxed{c_2(t) = \frac{t^2}{2} + e^{-t} + \tilde{c}_2}$$

$$\underline{X}(t) = \begin{pmatrix}-1 & 0 & -e^t\\ 1 & -e^t & -te^t\\ -1 & e^t & e^t(t-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t - t + c_1\\ \frac{t^2}{2}+e^{-t}+c_2\\ -t+c_3\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -e^t + t - c_1 + te^t - c_3e^t\\ e^t - t + c_1 - \underline{\frac{t^2}{2}e^t} - 1 - c_2e^t + \underline{t^2e^t} - c_3te^t\\ -e^t + t - c_1 + \frac{t^2}{2}e^t + 1 + c_2e^t - e^t(t^2-t) + c_3e^t(t-1)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -c_1 - c_3e^t - e^t + te^t + t\\ c_1 - c_2e^t - c_3te^t - t - 1 + \frac{t^2}{2}e^t\\ -c_1 + c_2e^t + c_3e^t(t-1) + t + e^t\left(-\frac{t^2}{2}+t\right)+1\end{pmatrix}$$