תאריך הבחינה: 11.09.2008
שם המרצה: פרופ' פונף ו, ד"ר אוכלוב א,
ד"ר גולקו ג., ד"ר גולדשטיין ד
ד"ר חייט א
שם הקורס: מבוא למשוואות דיפרנציאליות
להנדסת חשמל
מס' הקורס: 201-1-9841
שנה: א' סמסטר: ב' מועד ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6.
משקל כל השאלות זהה ושווה 20 נק'.
כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.
במידה והשבת על יותר שאלות מהנדרש, תיבדקנה כולם ותבכרנה 5 השאלות הטובות.

שאלה מס' 1 מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $(2x^2 y\, ln\, y - x)y' = y$

שאלה מס' 2 נתונה משוואה דיפרנציאלית $(1)\quad y'' + py' + qy = g(x)$
כאשר פונקציות $g(x)$ רציפה ב $\mathbb{R}$ ו- q, p קבועים, $p > 0\ ,q > 0$
נניח ש $u(x)$ ו- $v(x)$ פתרונות של (1) ב $\mathbb{R}$. צריך להוכיח $\lim_{x\to\infty}(u(x) - v(x)) = 0$

שאלה מס' 3 פתור את בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases} y''^2 y + y'^2 y'' = yy'y''' - y'y''^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -1 \end{cases}$$

שאלה מס' 4 פתור משוואה ליניארית עם מקדמים קבועים

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x(x+1) + sin\, x$$

שאלה מס' 5

פתור בעזרת התמרת לפלס: $\begin{cases} y'' + y' = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ כאשר $f(t) = \begin{cases} |cos\, t|\,, & 0 \le t \le \frac{5\pi}{2} \\ 0, & t > \frac{5\pi}{2} \end{cases}$

הערה : $\sin(t - \frac{\pi}{2}) = -\cos t$

שאלה מס' 6 פתור את מערכת המשוואות הלא הומוגנית $\bar{y}' = A\,\bar{y} + \bar{b}$ כאשר

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

בהצלחה!

1. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$

$$2x^2 \ln y - \frac{x}{y} = x'$$

$$x' + \frac{1}{y}x = 2x^2 \ln y$$ — משוואת ברנולי $\quad 1 : x^2$

$$\frac{x'}{x^2} + \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{x} = 2\ln y$$

$$\frac{1}{x} = z(x) \Rightarrow -\frac{1}{x^2}\cdot x' = z'$$

$$-z' + \frac{1}{y}z = 2\ln y$$

$$z' - \frac{1}{y}z = -2\ln y$$ — משוואת לינארית

$$z' - \frac{1}{y}z = 0$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{dy}{y} \qquad z \neq 0\ ,\ y \neq 0$$

$$\ln|z| = \ln|y| + \ln c$$

$$z = cy \qquad c = c(y)$$

$$z = c(y)y \Rightarrow z' = c'\cdot y + c\cdot 1$$

$$c'y + c - \frac{1}{y}\cdot cy = -2\ln y$$

$$c' = -2\frac{\ln y}{y} \Rightarrow c(y) = -2\int\frac{\ln y}{y}dy \Rightarrow c(y) = -\ln^2 y + c_1$$

$$z = (-\ln^2 y + c_1)y$$

$$\frac{1}{x} = (-\ln^2 y + c_1)y$$ — פתרון כללי

2. $y''+py'+qy=g(x)$

אם $u(x)$; $V(x)$ פתרונות של המשוואה, אז

$(u(x)-V(x))$ – פתרון של המשוואה הומוגנית:

$$y''+py'+qy=0$$

נחפש פתרון של המשוואה:

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

① $\lambda_1,\lambda_2<0$

$$y_{ה}=c_1\underbrace{e^{-\lambda_1 x}}_{u(x)}+c_2\underbrace{e^{-\lambda_2 x}}_{V(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} y_{ה}=0$$

$p^2-4q=0 \Rightarrow$

$\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}$ מקרה כפול

$$\left(c_1 \underbrace{e^{-\lambda_1 x}}_{\to 0}+c_2 \underbrace{x e^{-\lambda_1 x}}_{\to 0}\right)$$

② λ_1,λ_2 – מרוכבים

$$\lambda_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{4q-p^2}$$

$$y_{ה}=e^{-\frac{p}{2}x}\left(c_1\cos\left(\sqrt{4q-p^2}\right)x+c_2\sin\left(\sqrt{4q-p^2}\right)x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} y_{ה}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{e^{-\frac{p}{2}x}}_{0}\Big(\underbrace{c_1\cos\left(\sqrt{4q-p^2}\right)x+c_2\sin\left(\sqrt{4q-p^2}\right)x}_{\text{חסום}}\Big)=$$

$=0$

3. $y''^2 y + y'^2 y'' = y y' y''' - y' y''^2$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 1$

$y''(0) = -1$

$y' = p(y)$

$y'' = pp'$

$y''' = p'' p^2 + (p')^2 \cdot p$

$$\cancel{(pp')^2 y} + p^2 \cdot pp' = yp\left(p''p^2 + \cancel{(p')^2 p}\right) - p(pp')^2$$

$p^3 p' = y p'' p^3 - p^3 p'^2 \qquad | : p^3$

$p' = y p'' - p'^2$

$p' = t(y) \qquad p'' = t'$

$t = y t' - t^2$

$t' - \frac{1}{y} t = \frac{1}{y} t^2$ — משוואת ברנולי $\quad | : t^2$

$\frac{t'}{t^2} - \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{y}$

$y t' = t + t^2$

$\int \frac{dt}{t(1+t)} \quad \int \frac{dy}{y}$

$\frac{1}{t} = z \qquad -\frac{1}{t^2} \cdot t' = z'$

$-z' - \frac{1}{y} z = \frac{1}{y}$

$z' + \frac{1}{y} z = -\frac{1}{y}$

$$z' = -\frac{1}{y} z$$

$$\frac{y''}{y'} = c_1 \cdot 1\left(1 + \frac{y''}{y'}\right)$$

$$-\frac{1}{1} = c_1 \cdot 1\left(1 - \frac{1}{1}\right)$$

$$\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{y}$$

$$\ln|z| = -\ln|y| + \ln c$$

$$z = \frac{c}{y} \qquad z = \frac{c(y)}{y} \Rightarrow z' = \frac{c'(y)\,y - c(y)}{y^2}$$

$$\frac{c'(y)}{y} - \frac{c(y)}{y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{c(y)}{y} = -\frac{1}{y}$$

$$c'(y) = -1$$

$$c(y) = -y + c_1$$

$$z = (-y + c_1) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{t} = (-y + c_1) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{p'} = (-y + c_1) \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{y}{-y + c_1} = p' = \frac{dp}{dy} \qquad \left\{ p' = \frac{y''}{p} = \frac{y''}{y'} \right\}$$

$$\frac{y}{-y + c_1} = \frac{y''}{y'}$$

מציבים תנאי התחלה

$$\frac{1}{-1 + c_1} = \frac{-1}{1} \Rightarrow 1 = 1 - c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\frac{y}{-y} = \frac{dp}{dy}$$

$$\int dp = -\int dy$$

$$p = -y + c_2$$

$$y' = -y + c_2$$

מציבים תנאי התחלה:

$$1 = -1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 2$$

$$y' = -y + 2$$

$$\int \frac{dy}{-y+2} = \int dx$$

$$-\ln|-y+2| = x + c_3$$

מציבים תנאי התחלה:

$$-\ln|0+2| = 0 + c_3 \Rightarrow c_3 = -\ln 2$$

$$-\ln|-y+2| = x - \ln 2$$

$$-x = \ln|-y+2| - \ln 2$$

$$-x = \ln \frac{|-y+2|}{2}$$

$$2e^{-x} = -y + 2$$

$$y = 2 - 2e^{-x}$$

4. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x(x+1) + \sin x$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$(\lambda - 1)^3 = 0 \qquad \lambda_{1,2,3} = 1$

$y_{\text{п}} = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

$f_1(x) = e^x(x+1)$

$\gamma = 1, \quad P_n \quad n = 1$

$y_1 = e^x \cdot x^3(ax+b) = e^x(ax^4 + bx^3)$

$y_1' = e^x(ax^4+bx^3) + e^x(4ax^3+3bx^2)$

$y_1'' = e^x(ax^4+bx^3) + 2e^x(4ax^3+3bx^2) + e^x(12ax^2+6bx)$

$y_1''' = e^x(ax^4+bx^3) + 3e^x(4ax^3+3bx^2) + 3e^x(12ax^2+6bx) +$

$+ e^x(24ax+6bx)$

$\cancel{e^x(ax^4+bx^3)} + \cancel{3e^x(4ax^3+3bx^2)} + \cancel{3e^x(12ax^2+6bx)} + e^x(24ax+6b)$

$-\cancel{3e^x(ax^4+bx^3)} - \cancel{6e^x(4ax^3+3bx^2)} - \cancel{3e^x(12ax^2+6bx)}$

$+\cancel{3e^x(ax^4+bx^3)} + \cancel{3e^x(4ax^3+bx^2)}$

$-\cancel{e^x(ax^4+bx^3)} = e^x(x+1)$

$e^x(24ax+6b) = e^x(x+1)$

$a = \frac{1}{24} \qquad b = \frac{1}{6}$

$$f_2(x) = \sin x$$

$$y_2 = a\cos x + b\sin x$$

$$y_2' = -a\sin x + b\cos x$$

$$y_2'' = -a\cos x - b\sin x$$

$$y_2''' = a\sin x - b\cos x$$

$$a\sin x - b\cos x + 3a\cos x + 3b\sin x - 3a\sin x +$$

$$+3b\cos x - a\cos x - b\sin x = \sin x$$

$$\begin{array}{l} \sin x: \\ \cos x: \end{array} \begin{cases} a + 3b - 3a - b = 1 \\ -b + 3a + 3b - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b - 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \qquad b = \frac{1}{4} \quad a = -\frac{1}{4}$$

$$y_2 = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x$$

$$y = y_{\pi} + y_1 + y_2$$

5. $y'' + y' = f(t)$

$y(0) = 0$

$y'(0) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} |\cos t|, & 0 \le t < \frac{5\pi}{2} \\ 0, & t \geqslant \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

$$L[y''] + L[y'] = L[f(t)]$$

$$s^2 L[y] - s\overset{=0}{y(0)} - \overset{=0}{y'(0)} + sL[y] - \overset{=0}{y(0)} = L[f(t)]$$

$$L[y](s^2 + s) = L[f(t)]$$

$$L[y] = \frac{L[f(t)]}{s(s+1)}$$

$$f(t) = \left(u_0 - u_{\frac{5\pi}{2}}\right) \cdot |\cos t| = \left(u_0 - u_{\frac{\pi}{2}}\right)\cos t + \left(u_{\frac{\pi}{2}} - u_{\frac{3\pi}{2}}\right) \times$$

$$\left(-\cos t\right) + \left(u_{\frac{3\pi}{2}} - u_{\frac{5\pi}{2}}\right)\cos t = u_0 \cos t + u_{\frac{\pi}{2}} \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ u_{\frac{\pi}{2}} \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

6. $y' = A\bar{y} + \bar{b}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} z_1 - z_2 + 2z_3 = 0 \\ -2z_1 + z_2 - 2z_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -z_1 = 0 \\ z_2 = 2z_3 \end{cases} \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = i$$

$$\begin{pmatrix} 2-i & -1 & 2 \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (2-i)z_1 - z_2 + 2z_3 = 0 \\ z_1 - iz_2 + 2z_3 = 0 \\ -2z_1 + z_2 - (1+i)z_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} (1-i)z_1 &= (1-i)z_2 \\ z_1 &= z_2 \\ z_2 &= -(1+i)z_3 \end{aligned}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} -(1+i) \\ -(1+i) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \begin{pmatrix} -1+i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$(\cos x + i\sin x)\begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x - i\cos x - i\sin x + \sin x \\ -\cos x - i\cos x - i\sin x + \sin x \\ \cos x + i\sin x \end{pmatrix}$$

$$y_{\text{ה}} = c_1 e^x \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\cos x + \sin x \\ -\cos x + \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -\cos x - \sin x \\ -\cos x - \sin x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

מחפשים פתרון פרטי:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2a - b + 2c - 3 &= 0 \\ a + 2c - 3 &= 0 \\ -2a + b - c + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1)-(2):& \\ (1)+(3):& \end{aligned} \begin{cases} a - b = 0 \\ c - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 1 \end{cases}$$

$$(1): 2a - a + 2\cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי:

$$y = y_{\text{ה}} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$