אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 17/07/05
שם המורה: פונק ו., ה(ו)י א.
מבחן ב: מ"ד רגילות
מסי הקורס: 201-1-9841
מיועד לתלמידי: ____
שנה: א סמ׳: ב מועד: ב
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשבון כיס קטן
דף

מסי נבחן: ____

יש לענות על 5 מתוך 6 שאלות (כל שאלה שווה ל 20 נקודות). אפשר לפתור 6 שאלות. 5 הכי טובות "בחרו.

א' ① פתור את הבעית קושי

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{\cos y} = x\cos y - \sin y \\ y(0) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

② מצא פתרון כללי של המשואה

$$(x+2\sin y)\,dx - \frac{1}{2}(x^2+1)\frac{\cos y}{\sin y}\,dy = 0$$

③ פתור את הבעית קושי

$$e^y y''' = \frac{y''^2 e^y}{y'} + y'^2; \quad y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-$$

④ מצא פתרון כללי של המשואה

$$y^{(4)} - y = (x+1)e^x + \cos x$$

⑤ פתור בעזרת התמרת לפלס

$$\begin{cases} y''+9y = f(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} |\sin t|, & 0 \le t \le 2\pi \\ e^{-t}, & 2\pi < t < \infty \end{cases}$$

⑥ פתור את המערכת משואות

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y_3' = -3y_1 - 2y_2 + 3y_3 + 1 \end{cases}$$

בהצלחה

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{\cos y} = x\cos y - \sin y \\ y(0) = -\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

לא פתרון כ

$$y(0) = -\frac{\pi}{4}$$

$\cos y$ ב ג (1)

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = x - \operatorname{tg} y$$

$$z = \operatorname{tg} y$$

$$z' + z = x \qquad z = uv$$

$$u'v + \underbrace{uv' + uv}_{=0} = x$$

$$v' + v = 0 \quad , \quad v = e^{-x}$$

$$u' = xe^{x}$$

$$u = \int xe^{x}dx = \int x\,de^{x} = xe^{x} - e^{x} + C$$

$$z = uv = (x - 1 + Ce^{-x})$$

$$\operatorname{tg} y = (x - 1 + Ce^{-x})$$

$$x = 0$$

$$-1 = -1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\operatorname{tg} y = x - 1$$

$$\boxed{y = \operatorname{arctg}(x-1)}$$

פתור את

(2)

$$(x+2\sin y)\,dx-\frac{1}{2}(x^2+1)\,\frac{\cos y}{\sin y}\,dy=0$$

$$M_y=2\cos y$$

$$N_x=-x\,\frac{\cos y}{\sin y}$$

$$\frac{M_y-N_x}{-M}=-\mathrm{ctg}\,y$$

$$(\ln|\mu(y)|)'=-\mathrm{ctg}\,y$$

$$\mu(y)=e^{\int-\frac{d(\sin y)}{\sin y}}=e^{-\ln|\sin y|}$$

$$=\frac{1}{\sin y}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sin y}+2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{1}{2}(x^2+1)\,\frac{\cos y}{\sin^2 y}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+1)\,\frac{1}{\sin y}+g(x)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sin y}+g'(x)\quad\Rightarrow\quad g'(x)=2$$

$$g(x)=2x$$

$$F(x,y)=C$$

$$\frac{1}{2}(x^2+1)\,\frac{1}{\sin y}+2x=C$$

$$(x^2+1)=2(C-2x)\sin y$$

(3)

$$e^y y''' = \frac{y''^2 e^y}{y'} + y'^2; \quad y(0)=0;\ y'(0)=1,\ y''(0)=-1$$

$$y' = p(y); \quad y'' = p'p; \quad y''' = p''p^2 + p'^2 p$$

$$e^y (p''p^2 + p'^2 p) = \frac{p'^2 p^{\cancel{2}}}{\cancel{p}} e^y + p^2$$

$$e^y p'' \cancel{p^2} = \cancel{p^2} \qquad p \neq 0$$

$$p'' = e^{-y}$$

$$p' = -e^{-y} + c_1$$

$$y' = p = e^{-y} + c_1 y + C_2$$

$$x = 0$$

$$1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$y' = e^{-y} + c_1 y$$

$$y'' = -e^{-y} \cdot y' + c_1 y'$$

$$x = 0$$

$$-1 = -1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y' = e^{-y} \Rightarrow e^y dy = dx$$

$$e^y = x + C$$

$$x = 0$$

$$1 = C \Rightarrow e^y = x + 1$$

$$\boxed{y = \ln(x+1)}$$

4) מצא את הפתרון הכללי של $y^{(4)}-y=(x+1)e^{x}+\cos x$

1) $(k^2+1)(k^2-1)=k^4-1=0$

$k_{1,2}=\pm 1\ ,\ k_{3,4}=\pm i$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית

$$y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

2) פתרון פרטי של $y^{(4)}-y=(x+1)e^{x}$

ב 13 כנ

$$y_1(x)=x(ax+b)e^{x}=(ax^2+bx)e^{x}$$

$$y_1'(x)=(ax^2+(2a+b)x+b)e^{x}$$
$$y_2''(x)=(ax^2+(4a+b)x+2(a+b))e^{x}$$
$$y_2'''(x)=(ax^2+(6a+b)x+3(2a+b))e^{x}$$
$$y_2^{(4)}(x)=(ax^2+(8a+b)x+4(3a+b))e^{x}$$

$$\Rightarrow e^{x}[ax^2+(8a+b)x+4(3a+b)-ax^2-bx]=(x+1)e^{x}$$

$a=\frac{1}{8}\ ,\ b=\frac{-1}{8}$ $\qquad y_1(x)=\frac{1}{8}(x^2-x)e^{x}$

3) פתרון פרטי של $y^{(4)}-y=\cos x$

ב 13 כנ

$$y_2(x)=ax\cos x+bx\sin x$$

$$y_2'(x)=a\cos x+b\sin x-ax\sin x+bx\cos x$$
$$y_2''(x)=2b\cos x-2a\sin x-bx\sin x-ax\cos x$$
$$y_2'''(x)=-3a\cos x-3b\sin x+ax\sin x-bx\cos x$$
$$y_2^{(4)}(x)=-4b\cos x+4a\sin x+bx\sin x-ax\cos x$$

$$y_2^{(4)}-y_2=-4b\cos x+4a\sin x+\cancel{bx\sin x}-ax\cos x-ax\cos x-\cancel{bx\sin x}=\cos x$$

$$\Rightarrow -4b=1 \qquad a=0 \qquad y_2(x)=\frac{-1}{4}x\sin x$$

פתרון כללי של $y^{(4)}-y=(x+1)e^{x}+\cos x$

$$y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x+\frac{1}{8}(x^2-x)e^{x}-\frac{1}{4}x\sin x$$

$$\begin{cases} y'' + 9y = f(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} |\sin t|, & 0 \le t \le 2\pi \\ e^{-t}, & 2\pi < t < \infty \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 9y\} = p^2 F(p) - 2p - 1 + 9F(p) =$$

$$= (p^2+9)F(p) - 2p - 1$$

$$f(t) = (1 - H(t-\pi))\sin t + (H(t-\pi) - H(t-2\pi))(-\sin t)$$

$$+ H(t-2\pi)e^{-t} = \sin t + H(t-\pi)\sin(t-\pi) +$$

$$+ H(t-\pi)\sin(t-\pi) + H(t-2\pi)\sin(t-2\pi) +$$

$$+ H(t-2\pi)e^{-(t-2\pi)} \cdot e^{-2\pi}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{p^2+1} + 2e^{-\pi p}\frac{1}{p^2+1} + e^{-2\pi p}\frac{1}{p^2+1} +$$

$$+ e^{-2\pi} \cdot e^{-2\pi p}\frac{1}{p+1}$$

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2+9} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+9)}\left[1 + 2e^{-\pi p} + e^{-2\pi p}\right] +$$

$$+ e^{-2\pi} e^{-2\pi p} \frac{1}{(p+1)(p^2+9}$$

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+9)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+9}\right)$$

$$\frac{1}{(p+1)(p^2+9)} = \frac{1}{10}\left(\frac{1}{p+1} + \frac{-p+1}{p^2+9}\right)$$

$$y = 2\cos 3t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{24}\sin 3t +$$

$$+ 2\,H(t-\pi)\cdot\frac{1}{8}\left[\sin(t-\pi) - \frac{1}{3}\sin 3(t-\pi)\right] +$$

$$+ H(t-2\pi)\cdot\frac{1}{8}\left[\sin(t-2\pi) - \frac{1}{3}\sin 3(t-2\pi)\right] +$$

$$+ e^{-2\pi}\,H(t-2\pi)\,\frac{1}{10}\left[e^{-(t-2\pi)} - \cos 3(t-2\pi) +\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{3}\sin 3(t-2\pi)\right] =$$

$$= 2\cos 3t + \frac{7}{24}\sin 3t + \frac{1}{8}\sin t +$$

$$+ \frac{1}{4}H(t-\pi)\left[-\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t\right] +$$

$$+ H(t-2\pi)\left[\frac{1}{8}\sin t + \left(-\frac{1}{24} + \frac{e^{-2\pi}}{30}\right)\sin 3t + \frac{1}{10}e^{-t} -\right.$$

$$\left.- \frac{e^{-2\pi}}{10}\cos 3t\right]$$

פתור את מערכת משוואות

6

$$\begin{cases} x' = -x - 2y + 2z \\ y' = -2x - y + 2z \\ z' = -3x - 2y + 3z + 1 \end{cases}$$

$\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ מערכת: $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{C_2 \quad C_3}{\begin{vmatrix} -1-k & -2 & 2 \\ -2 & -1-k & 2 \\ -3 & -2 & 3-k \end{vmatrix}} = \underset{C_2 + C_3}{\begin{vmatrix} -1-k & -2 & 0 \\ -2 & -1-k & 1-k \\ -3 & -2 & 1-k \end{vmatrix}} = (1-k) \begin{vmatrix} -1-k & -2 & 0 \\ -2 & -1-k & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$= (1-k) \begin{vmatrix} 1-k & -2 & 0 \\ 1 & 1-k & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} L_2 - L_3$$

$$= (1-k)\left[(-1-k)(1-k) + 2\right] = (1-k)(k^2+1)$$

$k_1 = 1, \quad k_2 = i, \quad k_3 = -i$

$\underline{k_1 = 1}$

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ -3x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ y = z \end{matrix}$$

$\bar{u}^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \bar{x}^1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix}$

$k_2 = i$

$$\begin{cases} (-1-i)x - 2y + 2z = 0 & (1) \\ -2x + (-1-i)y + 2z = 0 & (2) \\ -3x - 2y + (3-i)z = 0 \end{cases}$$

$(1)-(2): \quad (1-i)x + (i-1)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} y = x \\ z = \frac{1}{2}(3+i)x \end{matrix}$

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$\bar{X}(t) = e^{it}\bar{u} = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix}}_{\bar{X}^2(t)} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}}_{\bar{X}^3(t)}$$

שטת וריאציה:

$$c_1' \cdot 0 + c_2' \cdot 2\cos t + c_3' \cdot 2\sin t = 0$$
$$c_1' \cdot e^t + c_2' \cdot 2\cos t + c_3' \cdot 2\sin t = 0$$
$$c_1' e^t + c_2' (3\cos t - \sin t) + c_3' (3\sin t + \cos t) = 1$$

$$\Rightarrow c_1' e^t = 0 \Rightarrow c_1 = 1$$

$$\begin{cases} c_2' \cdot 2\cos t + c_3' \cdot 2\sin t = 0 \\ c_2' (3\cos t - \sin t) + c_3' (3\sin t + \cos t) = 1 \end{cases}$$

$$\Delta = 2$$
$$c_2' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2\sin t \\ 1 & 3\sin t + \cos t \end{vmatrix} = -\sin t$$
$$c_2 = \cos t$$
$$c_3' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2\cos t & 0 \\ 3\cos t - \sin t & 1 \end{vmatrix} = \cos t$$
$$c_3 = \sin t$$

פתרון פרטי של $\bar{x}' = A\bar{x} + \bar{b}$

$$\tilde{\bar{x}} = c_1(t)\,\bar{x}^1(t) + c_2(t)\,\bar{x}^2(t) + c_3(t)\,\bar{x}^3(t)$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\sin t \\ 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ e^t + 2 \\ e^t + 3 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי:

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ e^t + 2 \\ e^t + 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \cdot 2\cos t + c_3 \cdot 2\sin t \\ c_1 e^t + c_2 \cdot 2\cos t + c_3 \cdot 2\sin t \\ c_1 e^t + c_2 (3\cos t - \sin t) + c_3 \cdot (3\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

c_1, c_2, c_3 קבועים.