תאריך הבחינה: 21 ,08.2008

שם המרצה: פרופ' פונף ו, דר' אוכלוב א, דר' גולדשטיין ד, דר' חייט א

שם הקורס: מבוא למשוואות דיפרנציאליות להנדסת חשמל

מס' הקורס: 201-1-9841

שנה: א' **סמסטר:** ב' **מועד** א'

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: אין

אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6.
משקל כל השאלות זהה ושווה 20 נק'.
כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.
במידה והשבת על יותר שאלות מהנדרש, תיבדקנה 5 השאלות הטובות.

שאלה מס' 1 מצא את הפתרון הכללי של המשוואה $\frac{xy'}{(\ln x \operatorname{arctg} y)-1} = (1+y^2)\operatorname{arctag} y$

שאלה מס' 2 נתונה משוואה $y'' + 2\frac{y'}{x} + e^x y = 0$

א) ידוע שהפונקציות y_1 ו- y_2 הן פתרונות למשוואה הנ"ל כך ש $W_{y_1\, y_2}(1) = 2$
יש לחשב את : $W_{y_1\, y_2}\ (5)$ בלי לפתור את המשוואה. (10 נק')

ב) האם הפונקציות $y_1 = x$ ו $y_2 = x^2$ יכולות להוות פתרון למשוואה $y'' + q(x)y = 0$
כאשר ידוע ש $q(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$. (10 נק')

שאלה מס' 3 פתור את בעיית קושי הבאה:

$$\begin{cases} y'y''' - y''^2 + y'^2 y'' = 2e^y y'^3 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

שאלה מס' 4 פתור משוואה ליניארית עם מקדמים קבועים

$$y''' + 2y'' + y' + 2y = \sin x + \cos 2x$$

שאלה מס' 5

פתור בעזרת התמרת לפלס: $\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ כאשר $f(t) = \begin{cases} t^2 & 0 \le t < 1 \\ 2 - t & 1 \le t < 2 \\ 0 & t \ge 2 \end{cases}$

שאלה מס' 6 פתור את מערכת המשוואות ההומוגנית $y' = Ay$ כאשר

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

בהצלחה!

1. $$\frac{xy'}{\ln x \arctan y - 1} = (1+y^2)\arctan y$$

$$\frac{xy'}{(y^2+1)(\ln x \arctan y - 1)} = \arctan y$$

$$z = \arctan y$$

$$z' = \frac{y'}{1+y^2}$$

מציבים במשוואה:

$$\frac{xz'}{\ln x \cdot z - 1} = z$$

$$z' = \frac{z}{x}(\ln x \cdot z - 1)$$

$$z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x} z^2$$ — משוואת ברנולי $\quad | : z^2 \ (z \neq 0)$

$$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} = \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{1}{z} = t \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = t'$$

$$-t' + \frac{1}{x} \cdot t = \frac{\ln x}{x}$$

$$t' - \frac{1}{x} t = -\frac{\ln x}{x}$$ משוואת לינארית

$$t' - \frac{1}{x} t = 0$$

$$\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|t| = \ln|x| + \ln c$$

$$t_{ה} = c \cdot x$$

ע"י שיטת וריאציה:

$$c = c(x) \Rightarrow t = c(x) \cdot x$$

$$t' = c'(x)\cdot x + c(x)$$

מציבים במשוואה לינארית :

$$c'(x)\cdot x + c(x) - \frac{1}{x}\cdot c(x)\cdot x = -\frac{\ln x}{x}$$

$$c'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$c(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \left\{\begin{matrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} & v = -\frac{1}{x}\end{matrix}\right\} =$$

$$= -\left[-\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{dx}{x^2}\right] = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + c_1$$

$$t = \left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + c_1\right)\cdot x$$

$$\frac{1}{z} = \ln x + 1 + c_1 x$$

$$\arctan y = \frac{1}{\ln x + 1 + c_1 x}$$ — פתרון כללי

$$z = 0 \Rightarrow \arctan y = 0 \Rightarrow y = 0$$ — פתרון מיוחד

(א

2. $y'' + 2\frac{y'}{x} + e^x y = 0$

$W_{(y_1,y_2)}(1) = 2$

$W_{(y_1,y_2)}(5) - ?$

$$W_{(y_1,y_2)}(1) = \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix} = y_1(1)y_2'(1) - y_1'(1)y_2(1)$$

$$W_{(y_1,y_2)}(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

$$W_{(y_1,y_2)}(1) = C\cdot e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \left(C\cdot\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{x=1} = 2 \Rightarrow C=2$$

$$W_{(y_1,y_2)}(5) = \frac{2}{x^2}\Big|_{x=5} = \frac{2}{25}$$

ב) הוכח $y_1=x$, $y_2=x^2$ יכולות להיות פתרון של המשוואה:

$$y'' + g(x)y = 0$$

$$p(x)=0 \Rightarrow W_{(y_1,y_2)}(x) = Ce^{-\int 0dx} = C$$

$$W_{(y_1,y_2)} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$$

$W(y_1,y_2)(0) = 0 \Rightarrow$ ורונסקיאן יהיה שווה ל-0 בכל נקודה

לכן y_1 ו-y_2 לא יכולים להיות פתרונות:

3. $y'y''' - y''^2 + y'^2 y'' = 2e^y y'^3$

$y(0)=0$

$y'(0)=1$

$y''(0)=1$

$y' = p(y)$

$y'' = p' \cdot p$

$y''' = p'' p^2 + p'^2 p$

מציבים במשוואה:

$p(p''p^2 + p'^2 p) - (p'p)^2 + p^2 \cdot p'p = 2e^y \cdot p^3 \quad | : p^3 (p \neq 0)$

$p'' + p' = 2e^y$

$p' = z$

$p'' = z'$

$z' + z = 2e^y$

$z' + z = 0$

$\int \frac{dz}{z} = -\int dy$

$\ln|z| = -y + c$

$z = c_1 e^{-y}$

$c_1 = c_1(y) \Rightarrow z = c_1(y) e^{-y}$

$z' = c_1' e^{-y} + c_1 \cdot (-e^{-y})$

$c_1' e^{-y} - c_1 e^{-y} + c_1 e^{-y} = 2e^y$

$c_1'(y) = 2e^{2y} \Rightarrow c_1(y) = 2\int e^{2y} dy = e^{2y} + c_1$

$z = (e^{2y} + c_1) e^{-y} \Rightarrow z = e^y + c_1 e^{-y}$

$$z = p' \Rightarrow p' = e^{y} + c_1 e^{-y}$$

$$p' = \frac{y''}{p} \Rightarrow \frac{y''}{p} = e^{y} + c_1 e^{-y}$$

מציבים תנאי התחלה:

$$\frac{1}{1} = e^{0} + c_1 e^{-0} \Rightarrow c_1 = 0$$

לכן,

$$p' = e^{y}$$

$$\frac{dp}{dy} = e^{y} \Rightarrow \int dp = \int e^{y} dy$$

$$p = e^{y} + c_2$$

$p = y'$. מציבים תנאי התחלה:

$$1 = e^{0} + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

לכן:

$$y' = e^{y}$$

$$\int \frac{dy}{e^{y}} = \int dx$$

$$-e^{-y} = x + c_3$$

מציבים תנאי התחלה:

$$-e^{-0} = 0 + c_3 \Rightarrow c_3 = -1$$

פתרון של בע"ת קושי:

$$-e^{-y} = x - 1 \Leftrightarrow e^{-y} = 1 - x \Leftrightarrow$$

$$-y = \ln(1-x) \Leftrightarrow y = \ln\left|\frac{1}{1-x}\right|$$

4. $y''' + 2y'' + y' + 2y = \sin x + \cos 2x$

$y''' + 2y'' + y' + 2y = 0$

$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$

$y_{\text{ה}} = C_1 e^{-2x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x$

$f_1(x) = \cos 2x \qquad \gamma = 2i$

$y_1 = a \cdot \cos 2x + b \sin 2x$

$y_1' = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x$

$y_1'' = -4a \cos 2x - 4b \sin 2x$

$y_1''' = 8a \sin 2x - 8b \cos 2x$

מציבים במשוואה:

$8a \sin 2x - 8b \cos 2x - 8a \cos 2x - 8b \sin 2x -$

$-2a \sin 2x + 2b \cos 2x + 2a \cos 2x + 2b \sin 2x =$

$= \cos 2x$

$$\begin{aligned} \sin 2x: \\ \cos 2x: \end{aligned} \begin{cases} 8a - 8b - 2a + 2b = 0 \\ -8b - 8a + 2b + 2a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a - 6b = 0 \\ -6a - 6b = 1 \end{cases}$$

$b = -\frac{1}{12}, \quad a = -\frac{1}{12}$

$y_1 = -\frac{1}{12} \cos 2x - \frac{1}{12} \sin 2x$

$f_2(x) = \sin x \qquad \gamma = i$

$y_2 = x(a\sin x + b\cos x)$

$y_2' = a\sin x + b\cos x + x(a\cos x - b\sin x)$

$y_2'' = a\cos x - b\sin x + a\cos x - b\sin x +$
$+ x(-a\sin x - b\cos x)$

$y_2''' = -2a\sin x - 2b\cos x - a\sin x - b\cos x +$
$+ x(-a\cos x + b\sin x)$

מציבים במשוואה!

$-3a\sin x - 3b\cos x + \cancel{x(-a\cos x + b\sin x)} +$
$+(2a\cos x - 2b\sin x)\cdot 2 + \cancel{2x(-a\sin x - b\cos x)} +$
$+ a\sin x + b\cos x + \cancel{x(a\cos x - b\sin x)} +$
$+ \cancel{2x(a\sin x + b\cos x)} = \sin x$

$$\begin{array}{l} \sin x: \\ \cos x: \end{array} \begin{cases} -3a - 4b + a = 1 \\ -3b + 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 4b = 1 \\ -2b + 4a = 0 \end{cases}$$

$$a = -\frac{1}{10}, \quad b = -\frac{2}{10}$$

$$y_2 = x\left(-\frac{1}{10}\sin x - \frac{2}{10}\cos x\right)$$

$$y = y_ה + y_1 + y_2$$

5. $y'' + y = f(t)$

$y(0) = 1$

$y'(0) = 0$

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$L[y''] + L[y] = L[f(t)]$$

$$s^2 L[y] - sy(0) - y'(0) + L[y] = L[f(t)]$$

$$L[y)(s^2+1) = L[f(t)] + s$$

$$L[y] = \frac{L[f(t)]}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}$$

$$y = L^{-1}\left[\frac{L[f(t)]}{s^2+1}\right] + L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$f(t) = (u_0 - u_1)t^2 + (u_1 - u_2)(2-t) + u_2 \cdot 0 =$$

$$= u_0 t^2 - u_1(t-1)^2 + u_1 - u_1(t-2) + u_2(t-2) -$$

$$- 2u_1(t-1) - 2u_1 = u_0 t^2 - u_1(t-1)^2 - 3u_1(t-1) +$$

$$+ u_2(t-2)$$

$$L[f(t)] = e^{-0 \cdot s} \cdot \frac{2!}{s^3} - e^{-1 \cdot s} \cdot \frac{2!}{s^3} - 3e^{-1 \cdot s} \cdot \frac{1}{s^2} + e^{-2 \cdot s} \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{L[f(t)]}{s^2+1} = e^{-0 \cdot s} \cdot \frac{2}{s^3(s^2+1)} - e^{-1 \cdot s} \cdot \frac{2}{s^3(s^2+1)} - 3e^{-1 \cdot s} \cdot \frac{1}{s^2(s^2+1)} + e^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2(s^2+1)}$$

$$\frac{2}{s^3(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+1} = \frac{As^2(s^2+1) + Bs(s^2+1) + C(s^2+1) +}{s^3(s^2+1)}$$

$$\underline{+(Ds+E)s^3}$$

$s^4: A + D = 0$

$s^3: B + E = 0$

$s^2: A + C = 0$

$s^1: B = 0$

$s^0: C = 2$

$\Rightarrow$ $C = 2$, $A = -2$, $D = 2$, $B = 0$, $E = 0$

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{As(s^2+1)+B(s^2+1)+(Cs+D)s^2}{s^2(s^2+1)}$$

s^3: $A + C = 0$ $\quad A = 0$

s^2: $B + D = 0$ $\quad C = 0$

s^1: $A = 0$ $\quad B = 1$

s^0: $B = 1$ $\quad D = -1$

$$y = L^{-1}\left[e^{-0.s}\left(-\frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s}{s^2+1}\right)\right] - L^{-1}\left[e^{-1.s}\left(-\frac{2}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{2s}{s^2+1}\right)\right]$$

$$-3L^{-1}\left[e^{-1.s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)\right] + L^{-1}\left[e^{-2.s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right)\right] + L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]$$

$$y = u_0\left(-2 + t^2 + 2\cos t\right) - u_1\left(-2 + (t-1)^2 + 2\cos(t-1)\right)$$

$$-3u_1\left((t-1) - \sin(t-1)\right) + u_2\left((t-2) - \sin(t-2)\right) + \cos t$$

6. $y' = Ay$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

נחפש ערכים עצמ"ם:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda - 2)^3 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

נחפש וקטורים עצמ"ם:

$\lambda_1 = 2$

$$\begin{cases} -2c_1 + c_2 = 0 \\ -4c_1 + 2c_2 = 0 \\ -2c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 2c_1$$

c_3 – חופשי

$$V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נחפש וקטור שלישי:

$$\begin{cases} (A - 2I)\overline{V_2} = \overline{V_0} \\ (A - 2I)\overline{V_2} = \overline{V_1} \end{cases}$$

וקטור מתקבל כקומבינציה לינארית:

$$(A - 2I)\overline{V_2} = \alpha \overline{V_0} + \beta \overline{V_1}$$

נפתור מערכת משוואות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & \alpha \\ -4 & 2 & 0 & 2\alpha \\ -2 & 1 & 0 & \beta \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 0 & \alpha \\ -2 & 1 & 0 & \alpha \\ -2 & 1 & 0 & \beta \end{array}\right)$$

1) $-2c_1 + c_2 = \alpha$

$c_2 = \alpha + 2c_1$

(3) $-2c_1 + c_2 = \beta$

$c_2 = \beta + 2c_1$

$\Rightarrow$

$$2c_2 = 4c_1 + \alpha + \beta$$

$$c_2 = 2c_1 + \frac{\alpha+\beta}{2}$$

c_1, c_3 - חופשי

α, β - חופשיים ($\alpha = 1,\ \beta = 1$ נבחר)

$$\bar{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \bar{V}_0 + \beta \bar{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון כללי של המערכת:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\begin{cases} y_1 = c_2 e^{2t} + c_3 t e^{2t} \\ y_2 = 2c_2 e^{2t} + c_3 (2t+1) e^{2t} \\ y_3 = c_1 e^{2t} + c_3 t e^{2t} \end{cases}$$