אוניברסיטת בן גוריון בנגב
מדור בחינות

תאריך הבחינה: 23.07.06
שם המורים: פרופ' פונפ ,.ד"ר זלצמן,
פרופ' טורייב ,פרופ' איזקסון
מבחן ב: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מס' הקורס 201-19841
סמסטר ב מועד ב

לא חסוי

משך הבחינה- 3 שעות, חומר עזר:דף נוסחאות

יש לענות על 5 מתוך 6 שאלות (כל שאלה שווה ל- 20 נקודות).

1. מצא את הפתרון הכללי של המשוואה: $y'=\dfrac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$

2. פתור את המשוואה הלא הומוגנית $y''-\dfrac{x+1}{x}y'-2\dfrac{x-1}{x}y=xe^{-x}$, $x>0$ **אם ידוע שפונקציה** $y_1=e^{\alpha x}$ **היא אחת מהפתרונות של המשוואה ההומוגנית מתאימה.**

3. פתור את בעית קושי : $y'\cdot y'''=2(y'')^2$ **כאשר**
$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1$

4. פתור את המשוואה הליניארית עם המקדמים הקבועים:

$$y'''-y''+4y'-4y=3e^{2x}-4\sin 2x$$

5. פתור בעזרת התמרת לפלס:

$$y''+y=\begin{cases}2e^{t} & 0\le t<1\\ 3-t & 1<t\le 3\\ 0 & t\ge 3\end{cases}\qquad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

6. פתור את המערכת משוואות הלא הומוגנית:

$$\begin{cases}x'=-x-2y+2z\\ y'=-2x-y+2z\\ z'=-3x-2y+3z+1\end{cases}$$

בהצלחה

תרגיל 1

$$y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2}$$

$$z = y+1; \quad y' = z'$$

$$z' = \frac{z^2}{xz - x^2}$$

$$z = tx;$$

$$t'x + t = \frac{t^2x^2}{tx^2 - x^2} = \frac{t^2}{t-1}$$

$$t'x = \frac{t^2}{t-1} - t = \frac{\cancel{t^2} - \cancel{t^2} + t}{t-1}$$

$$\int \frac{t-1}{t}\,dt = \int \frac{dx}{x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \neq 0 \\ t = 0 \Rightarrow \\ z = y+1 = 0 \\ y = -1 \\ \text{מיוחד} \end{array} \right.$$

$$t - \ln|t| = \ln|x| + \ln|c| = \ln|cx|$$

$$\underset{\frac{y+1}{x}}{\underset{\shortparallel}{t}} = \ln|c\underbrace{xt}_{\underset{z}{\shortparallel}}| = \ln|c\underset{\underset{y+1}{\shortparallel}}{z}| = \ln|c(y+1)|$$

$$\boxed{\frac{y+1}{x} = \ln|c(y+1)|}$$

$$\boxed{y = -1}$$

2) $y'' - \frac{x+1}{x}y' - 2\frac{x-1}{x}y = xe^{-x} \quad , x>0$

(1א) $y_1'' - \frac{x+1}{x}y_1' - 2\frac{x-1}{x}y_1 = 0$ פתרון של המשוואה $y_1 = e^{\alpha x}$

לכן

$\alpha^2 e^{\alpha x} - \frac{x+1}{x}\alpha e^{\alpha x} - 2\frac{x-1}{x}e^{\alpha x} = 0$

אז

$\alpha^2 - \alpha - 2 = \frac{1}{x}\alpha - \frac{2}{x}$

$(\alpha - 2)(\alpha+1) = \frac{1}{x}(\alpha-2) \implies \alpha = 2$

$y_1 = e^{2x}$

(ב) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ ((ב) המשוואה של פתרון y_2

$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{c\,e^{-\int p\,dx}}{y_1^2} \quad , \; y_1 = e^{2x}, \; p = -\frac{x+1}{x}$

$-\int p\,dx = \int \frac{x+1}{x}dx = x + \ln x$

$e^{-\int p\,dx} = e^{x+\ln x} = xe^x$

$\left(\frac{y_2}{e^{2x}}\right)' = \frac{c\,x\,e^x}{e^{4x}} \implies \left(\frac{y_2}{e^{2x}}\right)' = cxe^{-3x} \implies$

$\frac{y_2}{e^{2x}} = c\int xe^{-3x}dx = -c\,\frac{e^{-3x}}{9}(3x+1) \implies$

$y_2 = -\frac{c}{9}e^{-x}(3x+1) \implies y_2 = e^{-x}(1+3x)$

(ג) y_p - פתרון פר' של המשוואה (ג) לפי וריאציית

$y_p = M(x)y_1 + N(x)y_2$

$$y_p = M(x)e^{2x} + N(x)e^{-x}(1+3x)$$

$$\begin{cases} M'(x)e^{2x} + N'(x)e^{-x}(1+3x) = 0 \\ 2M'(x)e^{2x} + N'(x)e^{-x}(2-3x) = xe^{-x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$N'(x) = -\frac{1}{9}, \quad M'(x) = \frac{1}{9}e^{-3x}(1+3x) \Rightarrow$$

$$N(x) = -\frac{1}{9}x$$

$$M(x) = \frac{1}{9}\int e^{-3x}(1+3x)\,dx = -\frac{1}{27}e^{-3x}(2+3x)$$

$$y_p = M(x)e^{2x} + N(x)e^{-x}(1+3x)$$

$$y_p = -\frac{1}{27}e^{-x}(2+3x) - \frac{1}{9}x(1+3x)e^{-x} =$$

$$= -\frac{1}{27}e^{-x}(2+3x+3x+9x^2)$$

$$y_p = -\frac{1}{27}e^{-x}(2+6x+9x^2)$$

$$y = y_h + y_p, \quad y_h = C_1y_1 + C_2y_2$$

$$\boxed{y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}(1+3x) - \frac{1}{27}e^{-x}(2+6x+9x^2)}$$

פתרון כללי

$$y = C_1e^{2x} + C_3e^{-x}(1+3x) - \frac{1}{3}x^2e^{-x}$$ גם

גם פתרון כללי

③ שאלה

$$\begin{cases} y'y''' = 2y''^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

$$z = z(x) = y' \; ; \quad z' = y'' \; ; \quad z'' = y'''$$

$$z \cdot z'' = 2z'^2$$

$$p = p(z) = z' \; ; \qquad \cancel{z'' = p' \cdot p}$$

$$z \cdot p'p = 2p^2 \quad : p \quad (p \neq 0)$$

$$z \cdot p' = 2p$$

$$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{dz}{z} \; ; \qquad z = y' \not\equiv 0$$

$$\ln|p| = 2\ln|z| + \ln C$$

$$p = Cz^2$$

$$y'' = z' = Cz^2 = C \cdot y'^2$$

$$\underset{x=0}{\Downarrow}$$

$$C = 1$$

$$z' = z^2 \Rightarrow \int z^{-2}\,dz = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + C$$

$$-\frac{1}{y'} = x + C \underset{x=0}{\Rightarrow} C = -1 \Rightarrow y' = -\frac{1}{x-1} \Rightarrow y = -\ln|x-1| + C$$

$$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{y = -\ln|x-1|}$$

$p = 0$

$z' = 0$

$\Downarrow$

$y'' = 0$

לא מקיים

$y''(0) = 1$

④ $y''' - y'' + 4y' - 4y = 3e^{2x} - 4\sin 2x$,

$$y = y_h + y_p$$

$$r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0 \Rightarrow (r^2+4)(r-1) = 0,$$

$$r_{1,2} = \pm 2i, \quad r_3 = 1.$$

$$y_h = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 e^x$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

$$y_{p_1} = A e^{2x}$$

$$A e^{2x}(8 - 4 + 8 - 4) = 3e^{2x}$$

$$8A = 3 \qquad A = 3/8 \qquad y_{p_1} = 3/8\, e^{2x}$$

y_{p_2} - ? $\quad y_{p_2} = (B\cos 2x + D\sin 2x)\, x^s \quad s=1.$

$$y_{p_2} = (B\cos 2x + D\sin 2x)\, x$$

$$y'_{2p} = (-2B\sin 2x + 2D\cos 2x)x + B\cos 2x + D\sin 2x$$

$$y''_{2p} = (-4B\cos 2x - 4D\sin 2x)x + 2(-2B\sin 2x + 2D\cos 2x)$$

$$y'''_{2p} = (8B\sin 2x - 8D\cos 2x)x + 3(-4B\cos 2x - 4D\sin 2x)$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & -4Bx+8Dx+4B+4Bx-4D-8Dx-12B=0 \\ \sin 2x & -4Dx-8Bx+4D+4Dx+4B+8Bx-12D=-4 \end{array}$$

$$\begin{cases} -8B-4D=0 \\ 4B-8D=-4 \end{cases} \qquad B=-\frac{1}{5}, \quad D=\frac{2}{5}$$

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+C_3e^{x}+$$

$$+\frac{3}{8}e^{2x}-\frac{1}{5}x\cos 2x+\frac{2}{5}x\sin 2x$$

$$y''+y=\begin{cases}2e^{t} & 0<t\le 1\\ 3-t & 1\le t\le 3\\ 0 & t>3\end{cases}\qquad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

5

$$f(t)=2e^{t}(1-u_1)+(3-t)(u_1-u_3)=$$
$$=2e^{t}-2e\,u_1e^{t-1}-u_1(t-1)+2u_1+u_3(t-3)$$
$$L(f(t))=2\frac{1}{s-1}-2e\frac{e^{-s}}{s-1}+2\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}}{s^2}$$

$$L(y''+y)=s^2L(y)-sy(0)-y'(0)+L(y)=(s^2+1)Ly-1$$

$$L(y)=\frac{1}{s^2+1}+2\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}-2e\frac{e^{-s}}{(s-1)(s^2+1)}+2\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}-\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}+\frac{e^{-3s}}{s^2(s^2+1)}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{s^2+1}\right);\quad \frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{s(s^2+1)}=\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}\right);$$

$$\frac{1}{s^2+1}\qquad L(\sin t)$$

$$\frac{2}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{1}{s-1}-\frac{s+1}{s^2+1}\qquad L(e^{t}-\cos t-\sin t)$$

$$e\frac{e^{-s}}{(s-1)(s^2+1)}=e\left(\frac{e^{-s}}{s-1}-\frac{e^{-s}s}{s^2+1}-\frac{e^{-s}}{s^2+1}\right)\qquad L\left(e\left(u_1e^{t-1}-u_1\cos(t-1)-u_1\sin(t-1)\right)\right)$$

$$\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}=2\frac{e^{-s}}{s}-2\frac{e^{-s}s}{s^2+1}\qquad L(2u_1-2u_1\cos(t-1))$$

$$\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}=-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-s}}{s^2+1}\qquad L(u_1(t-1)+u_1\sin(t-1))$$

$$\frac{e^{-3s}}{s^2(s^2+1)}=\frac{e^{-3s}}{s^2}-\frac{e^{-3s}}{s^2+1}\qquad L(u_3(t-3)-u_3\sin(t-3))$$

$$y=e^{t}-\cos t+u_1\left(-e^{t}+(e-2)\cos(t-1)+(e+1)\sin(t-1)+2-(t-1)\right)$$
$$+u_3\left((t-3)-\sin(t-3)\right)$$

$$y=\begin{cases}e^{t}-\cos t & 0\le t\le 1\\ -\cos t+(e-2)\cos(t-1)+(e-1)\sin(t-1)+2-(t-1) & 1\le t\le 3\\ -\cos t+(e-2)\cos(t-1)+(e-1)\sin(t-1)-\sin(t-3) & 3\le t\end{cases}$$

$$y''+y=\begin{cases} 2e^t, & 0\le t<1 \\ 3-t, & 1\le t<3 \\ 0, & t\geqslant 3\end{cases} \qquad \begin{matrix} y(0)=0 \\ y'(0)=1\end{matrix}$$

$$L[y''+y]=L[f(t)]$$

$$L[y'']+L[y]=L[f(t)]$$

$$s^2L[y]-sy(0)-y'(0)+L[y]=L[f(t)]$$

$$L[y](s^2+1)=L[f(t)]+1$$

$$L[y]=\frac{L[f(t)]}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$f(t)=(u_0-u_1)2e^t+(u_1-u_3)(3-t)+u_3\cdot 0=$$

$$=u_0\cdot 2e^t-u_1 2e^t+3u_1-u_1t-3u_3+u_3t=$$

$$=2u_0e^t-2u_1e^{t-1}\cdot e+3u_1-u_1(t-1)-u_1-3u_3+$$

$$+u_3(t-3)+3u_3=2u_0e^t-2eu_1e^{t-1}+2u_1-$$

$$-u_1(t-1)+u_3(t-3)$$

$$L[f(t)]=2\cdot\frac{1}{s-1}-2e\cdot\frac{e^{-s}}{s-1}+2\cdot\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-3s}}{s^2}$$

$$L[y]=\frac{2}{(s-1)(s^2+1)}-2e\cdot\frac{e^{-s}}{(s-1)(s^2+1)}+2\frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}-\frac{e^{-s}}{s^2(s^2+1)}+$$

$$+\frac{e^{-3s}}{s^2(s^2+1)}+\frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s-1}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{A(s^2+1)+(Bs+C)(s-1)}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$\begin{matrix} s^2: \\ s^1: \\ s^0: \end{matrix}\begin{cases} A+B=0 \\ -B+C=0 \\ A-C=1\end{cases} \qquad \begin{matrix} B=C \\ A=-C \\ C=-\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\Rightarrow B=-\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{A(s^2+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+1)}$$

$$\begin{array}{l} s^2: \\ s^1: \\ s^0: \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \qquad \Rightarrow \quad B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{As(s^2+1)+B(s^2+1)+(Cs+D)s^2}{s^2(s^2+1)}$$

$$\begin{array}{l} s^3: \\ s^2: \\ s^1: \\ s^0: \end{array} \begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=0 \qquad \Rightarrow \quad C=0 \\ B=1 \qquad \Rightarrow \quad D=-1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s-1} - \frac{s}{s^2+1} - \cancel{\frac{1}{s^2+1}} - 2e \cdot e^{-s}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right) + 2\cdot e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) -$$

$$- e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) + e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}\right) + \cancel{\frac{1}{s^2+1}}$$

$$y = e^t - \cos t - \frac{2}{2} e\, u_1\left(e^{t-1} - \cos(t-1) - \sin(t-1)\right) +$$

$$+ 2u_1\left(1 - \cos(t-1)\right) - u_1(t-1) + u_1 \sin(t-1) +$$

$$+ u_3(t-3) - u_3 \sin(t-3)$$

$$y = e^t - \cos t + u_1\left(-e^t + (e-2)\cos(t-1) + (e+1)\sin(t-1) + \right.$$

$$\left. + 2 - (t-1)\right) + u_3\left((t-3) - \sin(t-3)\right)$$

$$y = \begin{cases} e^{-t} - \cos t & , \quad 0 \le t < 1 \\ -\cos t + (e-2)\cos(t-1) + (e-1)\sin(t-1) + 2 - (t-1) & , \quad 1 \le t < 3 \\ -\cos t + (e-2)\cos(t-1) + (e-1)\sin(t-1) - \sin(t-3) & , \quad t \geq 3 \end{cases}$$

6λ(κℓ

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ 1 & 1-\lambda & -1+\lambda \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\Big((1-\lambda)(3-\lambda) + 2(-1+\lambda) +$$

$$+ 3 - \lambda + 3(-1+\lambda) \Big) =$$

$$= (1-\lambda)\left(\overset{\lambda}{3} - \cancel{\lambda} - \cancel{3\lambda} + \lambda^2 - \cancel{2} + \cancel{2\lambda} + \cancel{3} - \cancel{\lambda} - \cancel{3} + \cancel{3\lambda} \right) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 + 1)$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$

$$\begin{aligned} -2u_1 - 2u_2 + 2u_3 &= 0 \\ \cancel{-2u_1 - 2u_2 + 2u_3 = 0} \\ -3u_1 - 2u_2 + 2u_3 &= 0 \end{aligned} \quad \ominus \qquad u_1 = 0, \quad u_2 = u_3 = 1 \qquad \bar{u}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-\left\{\begin{aligned} (-1-i)u_1 - 2u_2 + 2u_3 &= 0 \\ -2u_1 - (1+i)u_2 + 2u_3 &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\underbrace{-3u_1 - 2u_2}_{-5u_2} + (3-i)u_3 = 0 \quad \Rightarrow u_3 = \frac{5}{3-i}\,u_2 = \frac{5(3+i)}{\cancel{10}\,2}\,u_2$$

$$(1-i)u_1 + (\underbrace{\cancel{-2+1}}_{-1}+i)u_2 = 0$$

$$= -(1-i)u_2 = 0$$

$$u_1 = u_2$$

$$((-1-i)-2)u_2 + 2u_3 = 0$$

$$2u_3 = (3+i)u_2$$

$$u_3 = \frac{3+i}{2}\,u_2$$

$$u_1 = u_2 = 2 \qquad u_3 = 3+i$$

$$\underbrace{e^{it}}_{\cos t + i\sin t}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos t + i\,2\sin t \\ 2\cos t + i\,2\sin t \\ 3\cos t - \sin t + i(+3\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2\cos t & 2\sin t \\ e^t & 2\cos t & 2\sin t \\ e^t & 3\cos t - \sin t & 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\cos t\, C_2' + 2\sin t\, C_3' &= 0 \\ e^t c_1' + 2\cos t\, C_2' + 2\sin t\, C_3' &= 0 \\ e^t c_1' + (3\cos t - \sin t) C_2' + (3\sin t + \cos t) C_3' &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1' = 0 \Rightarrow \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \quad C_3' = -\operatorname{ctg} t \cdot C_2'$$

$$(3\cos t - \sin t) C_2' - (3\sin t + \cos t)\operatorname{ctg} t \cdot C_2' =$$

$$= \left(\cancel{3\cos t} - \sin t - \cancel{3\cos t} - \frac{\cos^2 t}{\sin t}\right) C_2' =$$

$$= -\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t} C_2' = -\frac{1}{\sin t} C_2' = 1$$

$$C_2' = -\sin t$$

$$\boxed{C_2 = \cos t}$$

$$C_3' = -\operatorname{ctg} t \cdot (-\sin t) = \cos t$$

$$\boxed{C_3 = \sin t}$$

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{3} c_i(t)\, \bar{x}^i(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t + 2\sin^2 t \\ 2\cos^2 t + 2\sin^2 t \\ 3\cos^2 t - \sin t \cos t + 3\sin^2 t + \\ + \cos t \cdot \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

<u>בדיקה</u>

$$A\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\-2 & -1 & 2\\-3 & -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

<u>תשובה</u>

$$X=\begin{pmatrix}2c_2\cos t+2c_3\sin t+2\\ c_1e^t+2c_2\cos t+2c_3\sin t+2\\ c_1e^t+c_2(3\cos t-\sin t)+c_3(3\sin t+\cos t)+3\end{pmatrix}$$