אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

מדור בחינות

תאריך הבחינה: 29/07/09

שם המורה: פרופ' כון י., ד"ר גבריאלוב ס., ד"ר גולדין, ד"ר זורליוב א.

מבחן ב: משוואות דיפרנציאליות רגילות

מסי הקורס: 201-19841

מיועד לתלמידי: ______

שנה: א סמ': ב מועד: א

משך הבחינה: 3 שעות

חומר עזר: מחשב כיס עם מסכת

מסי נבחן: ______

יש לענות על 5 שאלות מתוך 6. כל שאלה שווה 20 נקודות. אפשר לפתור 6 שאלות. 5 הכי טובות "נבחרו.

1. מצא פתרון כללי של המשוואה:

$$xy' + (1+y^2)\operatorname{arctg} y = (1+y^2)\cos x$$

2. פתור את המשוואה

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = 2\cos x + 6\sin x + (6x+4)e^{-x}$$

---

3. פתור את בעית קושי

$$y''' - \frac{y''^2}{y'} - y''y' + 2y'^2 y = 0$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$$

4. נניח ש $y_1(x)$ ו $y_2(x)$ שני פתרונות בלתי תלויים לינארית של המשוואה

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

כאשר $p(x)$ ו $q(x)$ פונקציות רציפות ב $\mathbb{R}$. נניח ש $y_1(a) = y_1(b) = 0$, $a < b$.

צ"ל: שקיים c, $a < c < b$, כך ש $y_2(c) = 0$.

רמז: להשתמש במשפט רול כדי להוכיח את הטענה בדרך השלילה.

5. פתור בעזרת התמרת לפלס

$$y'' + y = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ 1-(t-2)^2, & 1 < t \le 2 \\ 1, & t > 2 \end{cases}, \quad \text{כאשר } y(0) = y'(0) = 0.$$

6. פתור את מערכת משוואות $\bar{y}' = A\bar{y} + \bar{b}$ כאשר

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}$$

בהצלחה!

$$xy' + (1+y^2)\arctan y = (1+y^2)\cos x$$ — 1 —

$$x\frac{y'}{1+y^2} + \arctan y = \cos x$$

$$z = \arctan y$$

$$z' = \frac{y'}{1+y^2}$$

$$xz' + z = \cos x$$

מ"ד לינארית $$z' + \frac{1}{x}z = \frac{\cos x}{x}$$

$$z = uv$$

$$u'v + \underbrace{uv' + \frac{1}{x}uv}_{= 0} = \frac{\cos x}{x}$$

$$v' + \frac{1}{x}v = 0$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$u' \cdot \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow u' = \cos x \Rightarrow u = \sin x + C$$

$$z = uv = \frac{1}{x}(\sin x + C) = \arctan y$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y = \tan\left(\frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}\right)}$$

(2)

$$\boxed{y''' - 2y'' + y' - 2y = 2\cos x + 6\sin x + (6x+4)e^{-x}}$$

פתרון: 1) המשוואה האופיינית היא

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - 2 = \lambda^2(\lambda-2) + (\lambda-2) = (\lambda-2)(\lambda^2+1) \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = \pm i$$

לכן פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה הוא

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2\cos x + c_3 \sin x$$

2) מציאת פתרון פרטי

א) $f_1(x) = 2\cos x + 6\sin x \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 1 \Rightarrow \omega = i \Rightarrow r = 1,\ m = 0$

לכן נחפש פתרון פרטי בצורה

$$y_{p,1} = x(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_{p,1}' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y_{p,1}'' = -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x)$$

$$y_{p,1}''' = -3A\cos x - 3B\sin x + x(A\sin x - B\cos x)$$

נציב את זה במשוואה:

$$-3A\cos x - 3B\sin x + \cancel{x(A\sin x - B\cos x)} + 4A\sin x - 4B\cos x$$
$$+\cancel{x(2A\cos x + 2B\sin x)} + A\cos x + B\sin x + \cancel{x(-A\sin x + B\cos x)} +$$
$$+\cancel{x(-2A\cos x - 2B\sin x)} = 2\cos x + 6\sin x$$

$$\begin{array}{l|l} \cos x & -3A - 4B + A = 2 \\ \sin x & -3B + 4A + B = 6 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -A - 2B = 1 \\ 2A - B = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A - 4A + 6 = 1 \\ B = 2A - 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{y_{p,1} = x(\cos x - \sin x)}$$

ב) $f_2(x) = (6x+4)e^{-x} \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 0 \Rightarrow \omega = -1 \Rightarrow r = 0,\ m = 1$

לכן נחפש פתרון פרטי בצורה:

$$y_{p,2} = (Ax+B)e^{-x}$$

$$y_{p,2}' = Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}$$

$$y_{p,2}'' = -2Ae^{-x} + (Ax+B)e^{-x}$$

$$y_{p,2}''' = 3Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}$$

נציב במשוואה:

$$3Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x} + 4Ae^{-x} - 2(Ax+B)e^{-x} + Ae^{-x} - (Ax+B)e^{-x}$$
$$-2(Ax+B)e^{-x} = -6(Ax+B)e^{-x} + 8Ae^{-x} = (6x+4)e^{-x}$$

$$\begin{array}{l|l} x & -6A = 6 \\ 1 & -6B + 8A = 4 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ -6B - 8 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{y_{p,2} = -(x+2)e^{-x}}$$

תשובה:

$$\underline{y_g = x(\cos x - \sin x) - (x+2)e^{-x} + C_1 e^{2x} + C_2\cos x + C_3\sin x}$$

$$\cancel{p'' - p' = -2y \;\big|\; p^2}$$

$$\cancel{p'' p^2 - p^2 p' = -2y\, p^2}$$

$$\cancel{p'' p^2 + p'^2 p - p'^2 p - p^2 p' = -2y\, p^2}$$

$$\boxed{y''' - \frac{y''^2}{y'} - y'' \cdot y' + 2y'^2 y = 0} \qquad \left.\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \\ y''(0) &= 2 \end{aligned}\right\}$$

$$p'' \cancel{p^2} + p'^2 \cancel{p} - \frac{p'^2 \cancel{p^2}}{\cancel{p}} - p' \cancel{p^2} + 2 \cancel{p^2}\, y = 0$$

$$p'' - p' = -2y$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \;,\quad \lambda_1 = 0 \;,\quad \lambda_2 = 1$$

$$P_h = C_1 e^y + C_2$$

$$\tilde{p} = y\,(ay + b) = ay^2 + by$$

$$\tilde{p}' = 2ay + b \quad , \quad \tilde{p}'' = 2a$$

$$p'' - p' = 2a - 2ay - b = -2y$$

$$\left.\begin{aligned} 2a - b &= 0 \;\Rightarrow\; b = 2 \\ -2a &= -2 \;\Rightarrow\; a = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{p} = y\,(y + 2)$$

$$y' = p = C_1 e^y + C_2 + y\,(y + 2)$$

$$x = 0$$

$y(0)=0$

$y'(0) = 1, \quad y''(0)=2$

3'

$y'(0) = C_1 + C_2 = 1$

$y'' = p'p \Rightarrow p' = \frac{y''}{y'} = C_1 e^y + 2y + 2$

$x = 0$

$$2 = \frac{y''(0)}{y'(0)} = C_1 + 2$$

$C_1 = 0$

$C_2 = 1$

$$p = y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$$

$$\int \frac{dy}{(y+1)^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{y+1} = x + c$$

$x = 0$

$$-1 = c$$

$$-\frac{1}{y+1} = x - 1 \Rightarrow \frac{1}{y+1} = 1 - x \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$$

ברור ש $y_2(a)\neq 0$ & $y_2(b)\neq 0$ (אחרת הפתרונות y_1 & y_2 תלויים לינארית כי ורונסקיאן ב $x=a$ או ב $x=b$ שווה ל 0)

נניח בשלילה ש $y_2(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$

אז הפונקציה $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ רציפה ב $[a,b]$ ומ"א ובקצוות שלה מתאפסת ולכן לפי רול קיים $x_0\in(a,b)$ כך ש

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)'\Bigg|_{x=x_0}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{y_1'(x_0)y_2(x_0)-y_1(x_0)y_2'(x_0)}{y_2^2(x_0)}=0$$

$$\Downarrow$$

$$W_{y_1,y_2}(x_0)=0$$

לכן y_1 & y_2 תלויים לינארית, סתירה.

$$\begin{cases} y'' + y = f(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$F(p) = 2\,\frac{e^{-2p} - e^{-p}}{p^3(p^2+1)} + 2\,\frac{e^{-p}}{p^2(p^2+1)} =$$

$$= 2\left(e^{-2p} - e^{-p}\right)\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}\right) +$$

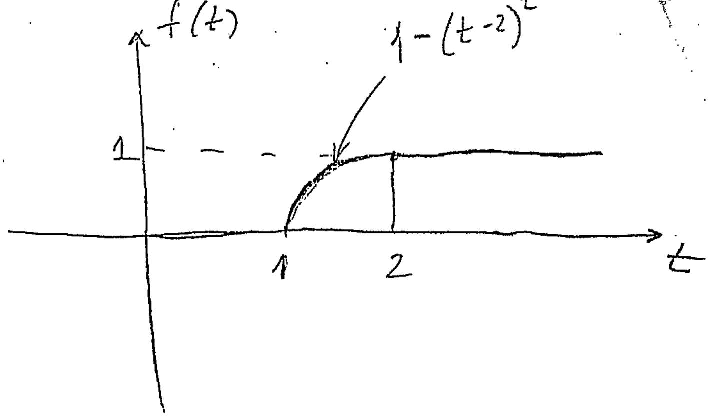
$$+ 2e^{-p}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}\right)$$

$$y(t) = 2\,H(t-2)\left(\frac{1}{2}(t-2)^2 - 1 + \cos(t-2)\right) -$$

$$- 2\,H(t-1)\left(\frac{1}{2}(t-1)^2 - 1 + \cos(t-1)\right) +$$

$$+ 2\,H(t-1)\left((t-1) - \sin(t-1)\right)$$

5



$$f(t) = \big(H(t-1) - H(t-2)\big)\big(1-(t-2)^2\big) + H(t-2) =$$

$$= H(t-1) - H(t-1)(t-2)^2 - \cancel{H(t-2)} + H(t-2)(t-2)^2 +$$

$$+ \cancel{H(t-2)} = H(t-1) + H(t-2)(t-2)^2 -$$

$$- H(t-1)\big((t-1)-1\big)^2 = \cancel{H(t-1)} + H(t-2)(t-2)^2 -$$

$$- H(t-1)(t-1)^2 + 2H(t-1)(t-1) - \cancel{H(t-1)}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-2p}\frac{2}{p^3} - e^{-p}\frac{2}{p^3} + 2e^{-p}\frac{1}{p^2}$$

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} = \frac{a}{p^3} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p} + \frac{\alpha p + \beta}{p^2+1}$$

$$1 = a(p^2+1) + bp(p^2+1) + cp^2(p^2+1) + (\alpha p + \beta)p^3$$

$$1 = (c+\alpha)p^4 + (b+\beta)p^3 + (a+c)p^2 + bp + a$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + \beta = 0 \\ c + \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= -1 \\ \beta &= 0 \\ \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}; \quad \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}$$

−6

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\1&1&2\end{pmatrix},\quad \bar{b}=\begin{pmatrix}e^{2x}\\0\\e^{2x}\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-1&1-\lambda&0\\1&1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)+1\right)=$$

$$=(2-\lambda)\left(3-3\lambda-\lambda+\lambda^2+1\right)=$$

$$=-(\lambda-2)^3$$

$$\lambda=2,\quad r=3$$

$$\begin{cases}u_1+u_2=0\\-u_1-u_2=0\\u_1+u_2=0\end{cases}$$

$u_2=-u_1$, u_1 - חופשי

$u_3=$ חופשי

$u_1=1$, $u_3=0$ $\quad \bar{V}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$u_1=0$, $u_3=1$ $\quad \bar{w}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\bar{u}^0=\alpha\bar{v}+\beta\bar{w}$$

$$\left.\begin{cases}u_1+u_2=\alpha\\-u_1-u_2=-\alpha\\u_1+u_2=\beta\end{cases}\right)\Rightarrow \alpha=\beta\ (=1)\ \Rightarrow \bar{u}^0=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

נמצא [illegible]

$$\left.\begin{cases}u_1+u_2=1\\-u_1-u_2=-1\\u_1+u_2=1\end{cases}\right)\Rightarrow u_1=1-\overset{=0}{u_2}\quad \bar{u}^1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

חופשי $u_3\ (=0)$

$$\bar{y}^1=\begin{pmatrix}e^{2x}\\-e^{2x}\\0\end{pmatrix};\quad \bar{y}^2=\begin{pmatrix}0\\0\\e^{2x}\end{pmatrix};\quad \bar{y}^3=e^{2x}(\bar{u}^0x+\bar{u}^1)=$$

$$=e^{2x}\begin{pmatrix}x+1\\-x\\x\end{pmatrix}$$

6'

$$Y = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 & e^{2x}(x+1) \\ -e^{2x} & 0 & -e^{2x}x \\ 0 & e^{2x} & e^{2x}x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} e^{2x}c_1' + e^{2x}(x+1)c_3' = e^{2x} \\ -e^{2x}c_1' - e^{2x}x\,c_3' = 0 \\ e^{2x}c_2' + e^{2x}x\,c_3' = e^{2x} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{matrix} c_1' + (x+1)c_3' = 1 \\ -c_1' - x\,c_3' = 0 \end{matrix}\right\} \oplus \Rightarrow c_3' = 1 \Rightarrow c_3 = x$$

$$c_2' + c_3' = 1 \Rightarrow c_2' = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$c_1' = -x$$

$$\Downarrow$$

$$c_1 = -\frac{x^2}{2}$$

$$\tilde{y} = -\frac{x^2}{2}e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + xe^{2x}\begin{pmatrix} x+1 \\ -x \\ x \end{pmatrix}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} c_1e^{2x} + c_3e^{2x}(x+1) - \frac{x^2e^{2x}}{2} + x(x+1)e^{2x} \\ -c_1e^{2x} - c_3xe^{2x} + \frac{x^2e^{2x}}{2} - x^2e^{2x} \\ c_2e^{2x} + c_3xe^{2x} + x^2e^{2x} \end{pmatrix}$$ תשובה