

תרגיל 12 באלגברה 2

(1) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו- W תת מרחב של V . נגדיר אופרטור $T: V \rightarrow V$ באופן הבא: לכל $v \in V$ נציג באופן יחיד $v = w + z$ כאשר $w \in W$ ו- $z \in W^\perp$ ונגדיר $T(v) = w - z$.
(א) הראו כי אופרטור לינארי T צמוד לעצמו ואוניטרי.

(ב) הראו כי כל אופרטור אוניטרי וצמוד לעצמו מתקבל בצורה כזאת.

(ג) יהא $V = \mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית. יהא $W = \text{Span}\{(1, 0, 1)\}$. מצאו את $[T]_{\mathcal{E}}$.

(2) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל \mathbb{C} ו- $T: V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי. הראו כי אם 0 הינו ערך עצמי יחיד של T אז $T = 0$.

(3) הוכיחו כי אוסף האופרטורים הלינאריים האוניטריים על מרחב ווקטורי נתון, סגור תחת פעולות ההרכבה וההופכי.

(4) יהיה V מרחב מכפלה פנימית מעל \mathbb{C} ו- $T: V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי. הוכיחו כי T צמוד לעצמו אם ורק אם כל הערכים העצמיים של T הם ממשיים.

(5) יהיו T ו- S אופרטורים צמודים לעצמם על מרחב V . הראו כי TS צמוד לעצמו אם ורק אם $TS = ST$.

(6) יהיה V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי ו- $T: V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי. הראו כי $\text{Im}(T) = \text{Im}(T^*)$.

(7) הראו כי התנאים הבאים על מטריצה $A \in M_{n \times n}(F)$ שקולים:
(א) A אוניטרית

(ב) קיים מרחב מכפלה פנימית V מממד n ובסיסים אורתונורמליים $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ל- V כך ש- $A = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

(ג) קיימים בסיסים אורתונורמליים $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ל- F^n (עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית) כך ש- $A = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

(8) יהיה $T: V \rightarrow V$ אופרטור נורמלי על מרחב מכפלה פנימית ממד סופי ויהיו v, u וקטורים עצמיים של T המתאימים לערכים עצמיים שונים. הוכיחו כי $\langle v, u \rangle = 0$.