מבנים אלגבריים 2

אביב תשע"ד

מרצה: אורי און

זמני הרצאה: יום ג' 10:00-12:00 בנין 32 חדר 309

יום ה' 14:00-16:00 בנין 28 חדר 107

מבנים מתמטיים: מהפרדה להרמוניה

בתחילת לימודי המתמטיקה אנחנו מוצגים הפרדה בין תחומים מתמטיים ולומדים לחוד את התחומים השונים כמו אלגברה, גיאומטריה, טופולוגיה וכו'.

$\mathbb{R}$: שדה $\{0,1,+,\cdot\}$ (אלגברה)

מרחב מטרי (אינפי, טופולוגיה)

קבוצה עם סדר מלא (תורת הקבוצות)

מה הקשרים בין המבנים?

תרגיל 1: הראו שיחס הסדר של $\mathbb{R}$ נקבע על ידי המבנה שלו כשדה.

תרגיל 2: הראו שהכפל והחיבור רציפים כהעתקות $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

למעשה יש קשרים הדוקים בין תחומים רבים שנראים שונים. למתמטיקה יש שתי נקודות מבט בסיסיות שבמשך שנים הכתיבו את ההתפתחות

גיאומטריה (פיסיקה)   אלגברה (אריתמטיקה)

הנה כמה דוגמאות.

חבורות = סימטריות של מבנים

X קבוצה עם מבנה (גרף, מרחב טופולוגי, מרחב וקטורי, ...) $\longleftrightarrow$ $Aut(X)$ חבורת האוטומורפיזמים של X

למשל

① $\{1,2,3,\dots,n\}$ — S_n = החבורה הסימטרית

② $\mathbb{R}^3$ — $GL_3(\mathbb{R})$ = העתקות ליניאריות / מטריצות הפיכות

③ $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$ — $O(3)$ = החבורה האורתוגונלית.

(אפליקציות לפיזיקה: שימור תנע זוויתי, מבנה האטום)

④ $F \subset E$ הרחבת שדות — $Aut(E/F)$ = חבורת גלואה.

⑤ הספירה של רימן  — $PGL_2(\mathbb{C})$ = מטריצות 2×2 הפיכות מעל $\mathbb{C}$
מודולו המרכז = העתקות מביוס.

⑥ $\mathbb{H}$ המישור ההיפרבולי — $PSL_2(\mathbb{R})$

באופן קצת כללי יותר: מדברים על פעולות של חבורות G על קבוצות X. $G \circlearrowright X$.

תזכורת: פעולה של חבורה על קבוצה

תהי G חבורה, X קבוצה. פעולה של G על X היא הומו'

$$G \longrightarrow Sym(X) = \{\text{כל ההעתקות חח"ע } X \to X\}$$

ניסוח שקול: זו העתקה

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g,x) \longmapsto g\cdot x$$

המקיימת:

① $1\cdot x = x$

② $(g\cdot h)\cdot x = g\cdot(h\cdot x)$

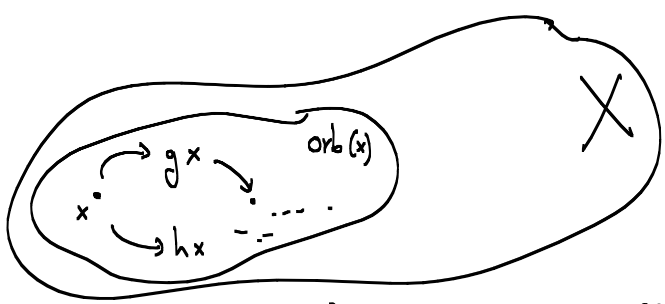
כפל ב-G הפעולה

• יהי $x\in X$ אז המסלול של x הוא הקבוצה

$$orb(x) = G\cdot x = \{ g\cdot x \mid g\in G\} \subseteq X$$

• המייצב של x הוא תת-החבורה של G

$$Stab_G(x) = \{ g\in G \mid g\cdot x = x \}$$



תכונות: ① המסלולים משרים חלוקה (זרה וממצה) של X.

② משפט ההומו' הראשון לפעולות: $G/Stab_G(x) \simeq orb(x)$ (העתקה חח"ע ועל בין קבוצות)

מודולים של חבורות והצגות ומודולים

הצגה של חבורה G מעל מרחב וקטורי V מעל שדה F היא הומומורפיזם

$$\rho: G \to Aut(V) \circlearrowright V$$

למשל אם $G=S_3$ ו- $V=\mathbb{C}^3$ נגדיר:

$$\begin{aligned} \rho: S_3 &\longrightarrow GL_3(\mathbb{C}) = Aut(V) \\ \sigma &\longmapsto \left(T_\sigma : \underset{e_i \longmapsto e_{\sigma(i)}}{\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3} \right) \end{aligned}$$

אם $G \curvearrowright X$ (נניח שגם סופי) אפשר להגדיר **הצגה** של G מעל מרחב וקטורי.

נסמן ב- $\mathbb{C}[X]=\{f: X \to \mathbb{C}\}$ את אוסף הפונקציות המוגדרות על X ו- $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \rho: G &\longrightarrow Aut(\mathbb{C}[X]) \\ g &\longmapsto (\rho(g)f)(x) = f(g^{-1} \cdot x) \end{aligned}$$

תרגיל: בידקו שזוהי אכן הצגה.

בפרט אפשר להגדיר ב- $\mathbb{C}[G]$ את אוסף הפונקציות על G, כאשר הפעולה היא כפל משמאל.

אפשר להראות ש- $\mathbb{C}[G]$ היא אלגברה ו- $\mathbb{C}[X]$ הוא $\mathbb{C}[G]$-מודול.

ולכן... אפשר להפעיל משפטים מתורת החוגים והמודולים.

מודולים מעל תחום ראשי, חבורות אבליות נוצרות סופית ופירוק ז'ורדן

משפט המבנה: R מודולים נוצרים סופית מעל תחום ראשי. אומר שכל מודול כזה איזומורפי

למודול מהצורה $R/I_1 \oplus \cdots \oplus R/I_r$

מודול ציקלי

כאשר $I_1 | I_2 | \cdots | I_r$, ובאופן יחיד.

בנוסף כל מודול ציקלי R/I אפשר לפרק כך: אם $I = (a)$

ו- $a = u \cdot p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$, u הפיך, p_i אי-פריקים אז

$$R/I \cong R/(p_1^{e_1}) \oplus \cdots \oplus R/(p_k^{e_k})$$

סיכום של שני אלה נותן:

$$M \cong \bigoplus_i \left(\bigoplus_j R/(p_i^{e_{ij}}) \right)$$

מודול נוצר סופית

- אם $R = \mathbb{Z}$ מקבלים את משפט המבנה של חבורות אבליות נ"ס
- אם $R = F[x]$ מקבלים את פירוק ז'ורדן.

מה נעשה בקורס?

- נרחיב את עולם המושגים האלגבריים/גיאומטריים (תבניות ריבועיות/בילינאריות, אלגברה מולטילינארית ועוד)
- נקשר בין תחומים שונים במתמטיקה: תורת הקטגוריות.