

הכיתה 11

משיכה / ציבה לפנים
(pullback) (pushout)

אינדיקטור: X (קבוצה), $P(X)$ אוסף תתי-קבוצות של X .

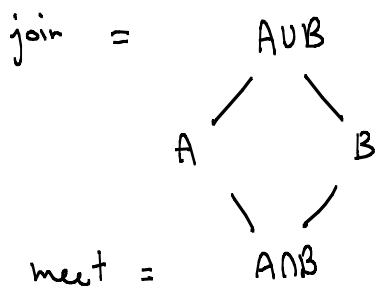
$P(X)$ סגורה תחת \cap ו- \cup .

אם $A, B \in P(X)$ אז $A \cap B$ ותחת $A \cup B$ יתקבלו תוצאות:

$$A \cup B \subseteq C \iff A \subseteq C \text{ ו-} B \subseteq C \iff A, B \subseteq A \cup B$$

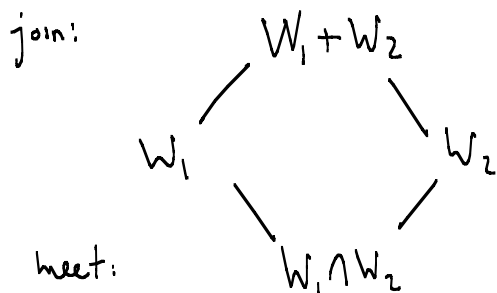
$$C \subseteq A \cap B \iff C \subseteq A \text{ ו-} C \subseteq B \iff A \cap B \subseteq A, B$$

כמו כן, $P(X)$ היא ע"פ

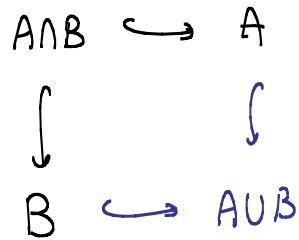


אם V מרחב וקטורי, $\mathcal{Q}(V)$ אוסף תתי-מרחבים של V הוא

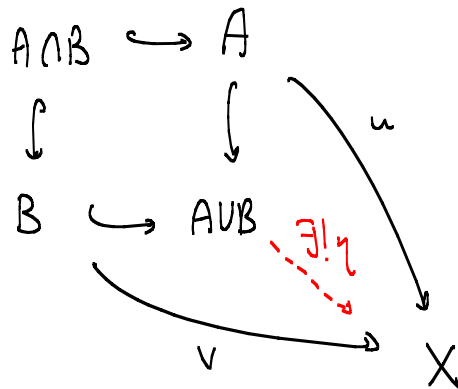
ע"פ $\mathcal{Q}(V)$ ע"פ



צדק אחרת ארסם שאל, במערה של קבוצות, היא שאלת האנדרג
 האנדרגים (הגודל) ביחס אבסולוטים היה דומה

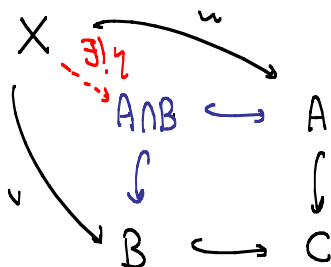


שכל קבוצה C אנדרגים $A \xrightarrow{u} C, B \xrightarrow{v} C$, יאם $v|_{A \cap B} = u|_{A \cap B}$
 יאם יש אנדרגים יאצב $\gamma: A \cup B \rightarrow C$ הליניאריה יאם $u - v$.



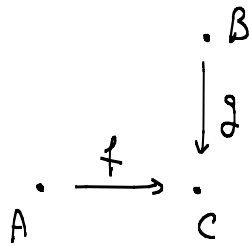
יך שהליניאריה
 הליניאריה

האלן דומה, ליניאריה יש אחר אנדרגים הליניאריה ביחס אבסולוטים



משיכה פואנטר

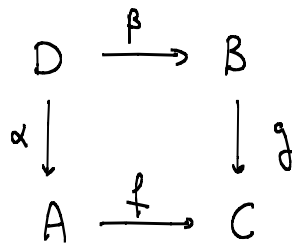
יהיו A, B, C עצמים בקטגוריה \mathcal{C} - $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$ מונדיפיסטים.



משיכה פואנטר (pullback) וזו מנסה סביב (fibered product) זהו

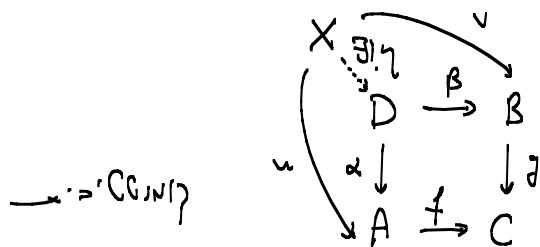
מאוביג D מונדיפיסטים $\alpha: D \rightarrow A$, $\beta: D \rightarrow B$ כך שהביטוי הזה

הביאג קומוטטיב



אך P מאוביג X - e מונדיפיסטים $u: X \rightarrow A$, $v: X \rightarrow B$ כך

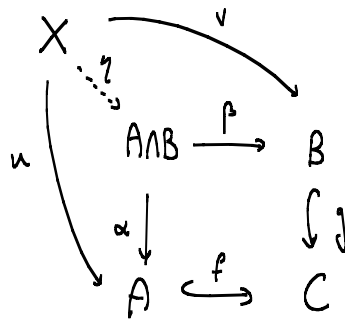
- e $gv = fu$ וי מונדיפיסטים יהיה $\eta: X \rightarrow D$ $\eta \circ u = \alpha$ $\eta \circ v = \beta$



1.3.1: נתונה A, B תתי קבוצות של קבוצה C .

נסמן $f: A \rightarrow C$, $g: B \rightarrow C$ האפקטור השיכון (= הפולד).

אם הנחיה זיהוי קיימת אז היא האפקטור של $A \cup B$.



אכן, לפי $X \xrightarrow{v} C$, $X \xrightarrow{u} A$ ו- $f \circ u = g \circ v$ הנחיה קיימת והאפקטור יחיד.

$$\eta(x) = \beta^{-1}(v(x)) = \alpha^{-1}(u(x))$$

נראה כי η הוא האפקטור היחיד.

$$(*) \quad \forall x \in X \quad g(v(x)) = f(u(x))$$

אכן, f, g הן הפולד הפולד/ון $(*)$ יתכן יתכן אם $u(x) = v(x) \in A \cap B$.

אז נראה כי $\beta^{-1}(v(x)) = \alpha^{-1}(u(x))$ יתכן, אז $v(x) = u(x)$.

$$\forall x \in X \quad \alpha(\eta(x)) = \alpha(\alpha^{-1}(u(x))) = u(x) \quad \text{אפקטור}$$

$$\beta(\eta(x)) = \beta(\beta^{-1}(v(x))) = v(x)$$

באזכרה 2:

אם V_1, V_2 מרחבי וקטורים איזומורפיים ל- U , $V_1 \xrightarrow{f_1} U$, $V_2 \xrightarrow{f_2} U$

ההומומורפיזם P הוא ההומומורפיזם קנייני הבנוי

$$P = \{ (v_1, v_2) \in V_1 \oplus V_2 \mid f_1(v_1) = f_2(v_2) \} \subseteq V_1 \oplus V_2 (= V_1 \times V_2)$$

ההומומורפיזם P הוא ההומומורפיזם קנייני הבנוי

ההומומורפיזם P הוא ההומומורפיזם קנייני הבנוי

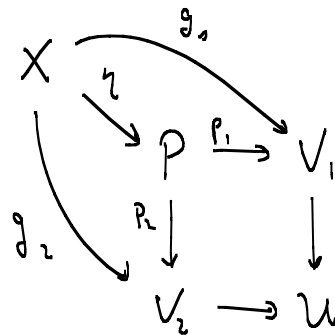
$$f_1(P_1(v_1, v_2)) = f_1(v_1) = f_2(v_2) = f_2(P_2(v_1, v_2))$$

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{P_1} & V_1 \\ \downarrow P_2 & & \downarrow f_1 \\ V_2 & \xrightarrow{f_2} & U \end{array}$$

אם $X \xrightarrow{g_i} V_i$ אז $f_2 g_2 = f_1 g_1$

$$\gamma: X \rightarrow P, \quad \gamma(x) = (g_1(x), g_2(x))$$

$$\begin{aligned} g_i(x) &\stackrel{?}{=} P_i(\gamma(x)) & | & \text{אם} \\ \parallel & & & \\ g_i(x) &= P_i(g_1(x), g_2(x)) = g_i(x) \end{aligned}$$



שני מקרים נוספים!

(ההסתקף-הן הדמיון
הוא)

$$\begin{array}{ccc}
 & V_1 & \\
 & \downarrow & \\
 V_2 & \rightarrow & (0)
 \end{array}
 \quad (א)$$

אם המערכת פשוטה היא $P = V_1 \oplus V_2$

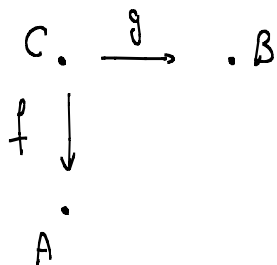
(למעשה זו המבנה $V_1 \cap V_2$ שבמקרה מתכנסת - הסכום הישר הוא $V_1 \cup V_2$)

(ב) אם $V_1, V_2 \subseteq W$ וההסתקף-הן שיהיה W

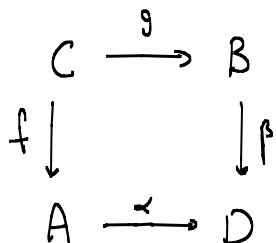
$$\begin{array}{ccc}
 V_1 \cap V_2 \cong \{(v_1, v_2) \mid v_1 = v_2\} & = P & \rightarrow V_1 \\
 u \mapsto (u, u) & \downarrow & \cap \\
 & V_2 & \subseteq W
 \end{array}$$

צאיפה פונקציה (pushout)

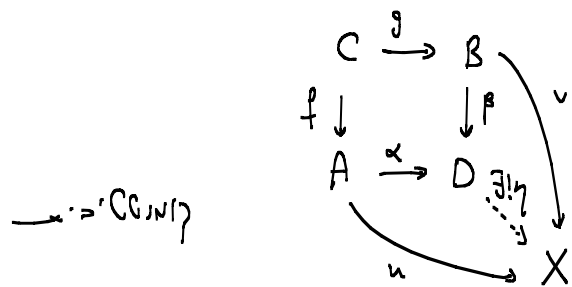
יביו A, B, C עצמים כקטגוריה \mathcal{C} -! $C \xrightarrow{f} A$, $C \xrightarrow{g} B$ מונדי עצמים.



צאיפה פונקציה (push out) $\beta: B \rightarrow D$, $\alpha: A \rightarrow D$ מונדי עצמים D האבקה \mathcal{D} שיהא קומוטטיבית



אבקה \mathcal{D} האבקה X \rightarrow e מונדי עצמים $v: B \rightarrow X$, $w: A \rightarrow X$ \rightarrow e מונדי עצמים $g \circ v = f \circ w$ \rightarrow e



צ'אקמאל: יאב A -| B נבולר צמ אמן $C = A \cap B$

אנשי קיביל בקיאגמיה

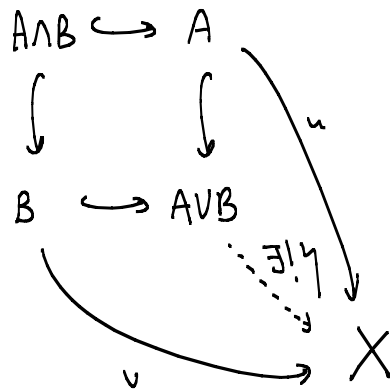
$$A \cap B \hookrightarrow A$$



B

אבא/אב AUB יאב סמ נא'בולר $B \leftrightarrow A \cup B$, $A \leftrightarrow A \cup B$

נא נבא'סג קסנ-ס נבא'גמיה.



תביל: 38 : נא'מא אב נב'ס'מ.

משפט 2: יהיו V, W_1, W_2 מרחבי וקטורים מעל F .

יהיו $f_i: V \rightarrow W_i$ מומונטים (הזוגות פונקציות).

$$S = \{ (f_1(v), -f_2(v)) \in W_1 \oplus W_2 \mid v \in V \}$$

$$D = \frac{W_1 \oplus W_2}{S}$$

$$j_1: W_1 \rightarrow D$$

$$w_1 \mapsto (w_1, 0) + S$$

$$j_2: W_2 \rightarrow D$$

$$w_2 \mapsto (0, w_2) + S$$

טענה: (D, j_1, j_2) היא זוגות פונקציות הומומורפיזמים.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f_1} & W_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ W_2 & \xrightarrow{j_2} & D \end{array}$$

הוכחה: באיור נשים לזכור - $j_1 f_1 = j_2 f_2$

$$j_1 f_1(v) = (f_1(v), 0) + S$$

? ||

$$j_2 f_2(v) = (0, f_2(v)) + S$$

לכן נניח שיש כי

$$(f_1(v), 0) - (0, f_2(v)) \in S$$

ענין לרשימה ל-1/4 צימוד

$$(0) \rightarrow W_1 \quad \text{כאם} \quad (2) \\ \downarrow \\ W_2$$

כאן $S = (0,0)$ איז היצאה פון די וואס $W_1 \perp W_2 = W_1 \oplus W_2$.

(3) כאם W_1 און W_2 זענען נאך אים פון אים זעלבן געבט $V = W_1 \cap W_2$!

$$W_1 \cap W_2 \hookrightarrow W_1 \quad \text{כאן} \\ \downarrow \\ W_2$$

$$S = \left\{ (\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1 = -\omega_2 \right\} \quad \text{!} \\ = \left\{ (\omega, -\omega) \mid \omega \in W_1 \cap W_2 \right\} \\ \cong W_1 \cap W_2$$

$$D = \frac{W_1 \oplus W_2}{S} \cong W_1 + W_2 \quad \text{כאן}$$

בכל הדיןן על מידגים לרעטוביים לוא הפעמנו חרבונוג מעבר
 אכן שמגד לרעטובי הווא מוצול מל הילג F . אכן, הוכדו
 שהמשיכה קאלר לבבאסה לענים קיימג חרעטוביה על R -מוצוליס.

תרגיל 39: יהי $f: M \rightarrow N$ הומו' על R -מוצוליס.

(1) הכוון ע- $\ker f$ הווא המשיכה קאלר על הביטוימה

$$\begin{array}{ccc}
 & (0) & \\
 & \downarrow & \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

(2) הכוון ע- $N/\text{Im} f$ הווא הביטוימה לענים על הביטוימה

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \downarrow & & \\
 (0) & &
 \end{array}$$

תרגיל 40: הכוון עבוקטוביה על אבוקור $G \times H$ (המכסה הרכסטיג-עם

ככל קסי קווארטיקל) היל מכסה קסעלויס. מהי המשיכה קאלר על

ביטוימה כללי על אבוקור?

$$\begin{array}{ccc}
 & H & \\
 & \downarrow f & \\
 G & \xrightarrow{g} & K
 \end{array}$$