

חבורות

הצורה: I קבוצה סדורה גלית A קטגוריה.

מדובר בקבוצה A של I היא אוסף עצמים $\{A_i \mid i \in I\}$

יש גם אוסף מרכיבים $\{\varphi_j^i : A_j \rightarrow A_i \mid i \leq j\}$ המתייחסים

$$\varphi_i^i = 1_{A_i} \quad (1)$$

$$\varphi_j^k = \varphi_i^k \circ \varphi_j^i \quad \text{כל } i \leq j \leq k \quad (2)$$

גבול הבורך של מדובר קבוצה היא עצם בקטגוריה A שמתון

$$\lim_{\leftarrow I} A_i$$

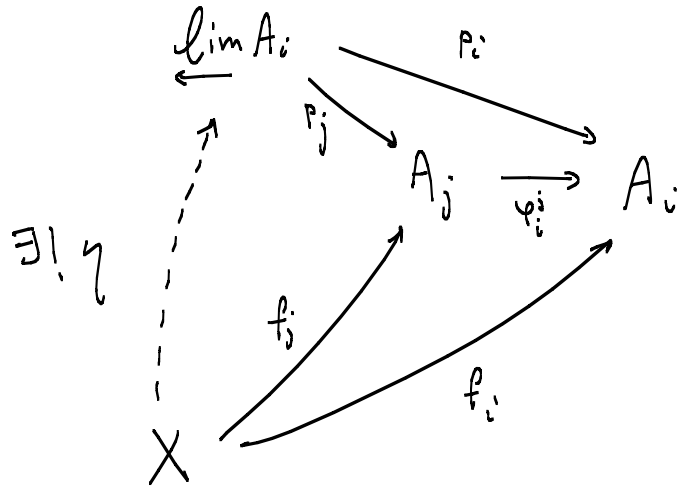
עם מרכיבים $p_i : \lim_{\leftarrow} A_i \rightarrow A_i \quad \forall i \in I$ כך מתקיים

$$(1) \quad \text{תואמת עם המדובר:} \quad \varphi_j^i \circ p_j = p_i \quad \forall i \leq j$$

(2) מונומורפיות: p_i עצם X עם מרכיבים $f_i : X \rightarrow A_i$ המתייחסים

$$\varphi_j^i \circ f_j = f_i \quad \forall i \leq j \quad \text{יש מרכיבים } \gamma : X \rightarrow \lim_{\leftarrow} A_i \quad \text{כך יאזכר}$$

שהצורה היא קבוצה



הצורה: 'כניג-ל' אם הנבחר קיים את הווא יאני צר כדו אי-אזווכי-צמ יאני הסתגל מ הודעה-קאב כפי-אזווכי-מרה.

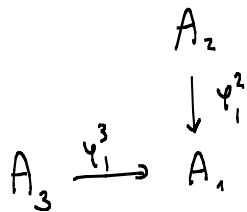
דוגמאות:



(1) אם $I = \{1, 2, 3\}$ אם יחס הסדר

! $\varphi_1^2: A_2 \rightarrow A_1$, $\varphi_1^3: A_3 \rightarrow A_1$ את $\varprojlim A_i$ הווא המשוכה לאזור

ה-ה-אזווכי-מרה



(2) אם I טשהי, אים הסדר הווא סכימאלי. (אין אף זל מעי-מ-ז'ט)

$$\prod A_i = \varprojlim A_i$$

③ יאמ $A_i = \mathbb{Z}/p^i \mathbb{Z}$ אנהדגהגה הן $\varphi_i^j: \mathbb{Z}/p^j \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^i \mathbb{Z}$ $i \leq j$
 $a + p^j \mathbb{Z} \mapsto a + p^i \mathbb{Z}$

יאז \mathbb{Z}_p הוא הגבול ההפוך. נאכיח יאז בהמשך.

Coen: הגבול ההפוך חתומהגהה של R -מופואים ק"מ.

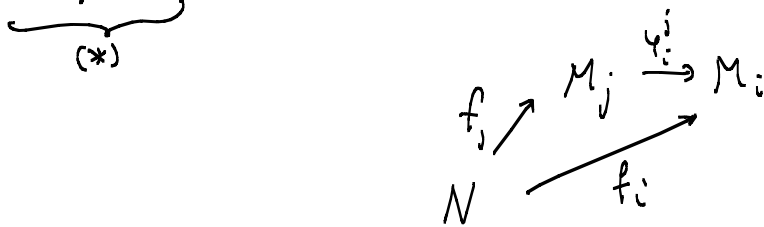
הנבחה: תהא I קס"ח! $\{M_i, \varphi_i^j\}$ ממוכד הגובה של מופואים.

קס"ח $S = \{ (m_i) \in \prod_{i \in I} M_i \mid \varphi_i^j(m_j) = m_i \ \forall i \leq j \}$

יאז S הוא תת-מופוא של המכפלה $\prod_{i \in I} M_i$, ארחה S יאז דם הגלגלומים.

של הבטואר $p_i: \prod M_i \rightarrow M_i$ $!$ S הוא גבול הפוך.

נזא e - N R -מופוא $!$ $f_i: N \rightarrow M_i$ מקיים $\varphi_i^j \circ f_j = f_i$ $\forall i \leq j$.



נגדדי $\gamma(n) := (f_i(n))$ יאז $(*)$ יאז $\gamma(n) \in S$.

אמריים $p_i \gamma(n) = f_i(n)$ $!$ γ נכחה בהאצוא פני תרואי יאז. \square

נסתד : 3

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} = \left\{ (x_i) \in \prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \mid x_j \equiv x_i \pmod{p^i} \forall i \leq j \right\}$$

ההגדרה של \mathbb{Z}_p .

$$\mathbb{Z}_p \longrightarrow \varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \quad \text{[2.1]}$$

$$a_0 + a_1 p + \dots \longmapsto (a_0, a_0 + a_1 p, a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \dots)$$

ההגדרה של \mathbb{Z}_p .

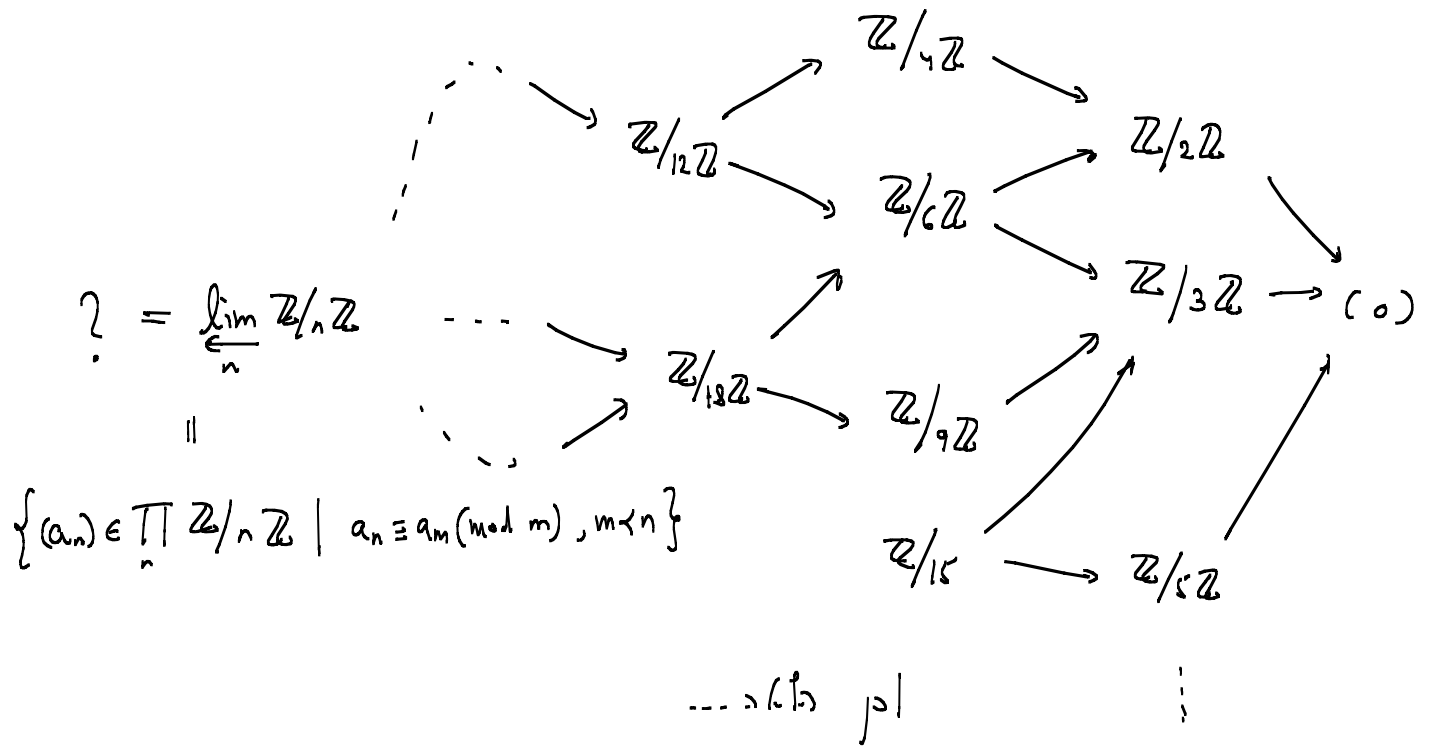
נסתד : 4 $\{ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N} \}$ קבוצה של רשתות

$$m \mid n \iff m \preceq n \quad \text{הרשתות הן פתוחות}$$

$$\varphi_m^n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad \text{ההעתקה}$$

$$a + n\mathbb{Z} \mapsto a + m\mathbb{Z}$$

ההעתקה φ_m^n היא

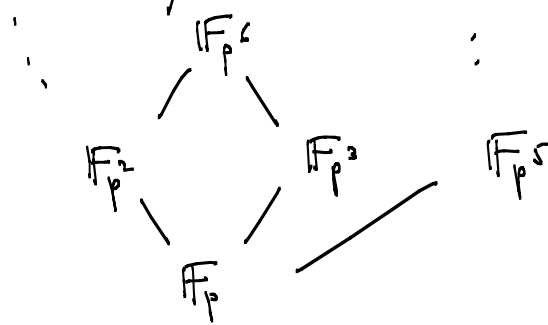


$\hat{\mathbb{Z}}$ אור החוקים הדיסקרט של המספרים הטבעיים

אינדיסור, נכנסו פתרון $\hat{\mathbb{Z}}$: אם \mathbb{F}_p^n השדה הסגור p^n אובייקט

אם $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$, כאשר $\sigma: x \mapsto x^p$ (פונקציות) בשרה היוצרת.

אור הדיסקרט של \mathbb{F}_p (כשרה) :



$m \mid n \iff \mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n}$ כולל

יש הסתגרות טבעית

$$\varphi_m^n : \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$$

$$\cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \quad m|n$$

גם נסמן ב- $\overline{\mathbb{F}_p}$ שדה אלגברי של \mathbb{F}_p ולכן כל ההרחבות

הסופיות הנ"ל, אינן יש הסתגרות

$$\rho_n : \text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$$

אומצת $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ הוא השדה הייבוק $\hat{\mathbb{Z}}$.

תוצאה 41: הוכיח - $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ ראשוני}} \mathbb{Z}_p$

כלומר

$$\varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \prod_{p \text{ ראשוני}} \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$$

הוכחה: נשתמש במבולג הילברט-נורט אומצת השדות הייבוק

$$\mathbb{Z}/p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{r_1} \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/p_k^{r_k} \mathbb{Z}$$

תוצאה 42:

היהו שהמבנה הייבוקיים של משפחה $\{G_i \mid i \in I\}$ של תבניות היא מבנה קטגורית קנטוריה של תבניות.

היהו שכל מצב הפוכה של תבניות $\{G_i \mid i \in I\}$ קיימת השדה הייבוק.

תרגיל 43 (הדומה): תהי G גבולה (ללא צורך סופי, התניה המעניינת

כאן הולט צוקר האינסופי) אנחנו

$$\mathcal{N} := \{ N \mid N \trianglelefteq G, [G:N] < \infty \}$$

= האוסף תתי הגבולה הננימאלים של G למינציה סופי.

הקבוצה \mathcal{N} מצוינת בסדר גלקי על ידי הבולמים נלקחי למינציה העולה

$$\{ G/N \mid N \in \mathcal{N} \}$$

של הגבולה.

האינז'יניאם $G/N \rightarrow G/N'$ כאשר $N \subseteq N'$ הינה הקולניג

אזכור ההיסק $\hat{G} := \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ קרוי גם ההשלמה הפרוסופי של G .

(יש לי $e - \lim_{\leftarrow} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא מניה סדסי של בנייה 15)

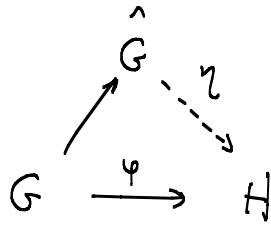
(1) הכאן האוסף הקוסטי $\{ gN \mid g \in G, N \in \mathcal{N} \}$ מצביי כסיס לסימולציה של G

(אלו הן הקבוצות הפרמולאט)

(2) הכאן $e \in \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N \iff$ היט צולאזיה האוסופי.

היט אגמנה כסי $G \rightarrow \hat{G}$ ש'כך צבולא
 $g \mapsto (gN)_{N \in \mathcal{N}}$

(3) הבהא \hat{G} - \hat{G} יש את התכונה האוניברסלית הבהא. קל אבנה
 סגור H (שנרצה אתה באופטימי נפייסנטי) אומו $\varphi: G \rightarrow H$ יש
 הומומורפיזם נרצה η איה כך שגיאומטרי הבהא קומוטטיבי



(4) הבהא \hat{G} - \hat{G} קומוטטיבי.