גבולות

הגדרה: תהא I קבוצה סדורה חלקית ו-$\mathcal{C}$ קטגוריה.
מערכת הפוכה בקטגוריה $\mathcal{C}$ מעל I היא אוסף עצמים $\{A_i \mid i\in I\}$
יחד עם אוסף מורפיזמים $\{\varphi_i^j : A_j \to A_i \mid i\le j\}$ המקיימים

(1) $\varphi_i^i = 1_{A_i}$

(2) $\varphi_j^k \varphi_i^j = \varphi_i^k$ לכל $i\le j\le k$.

גבול הפוך של מערכת הפוכה היא עצם בקטגוריה $\mathcal{C}$ שמסומן

$$\varprojlim_{I} A_i$$

עם מורפיזמים $p_i : \varprojlim A_i \to A_i$ $\forall i\in I$ כך שמתקיים

(1) תאימות עם המערכת: $\varphi_i^j p_j = p_i$ $\forall i\le j$

(2) אוניברסליות: לכל עצם X עם מורפיזמים $f_i : X\to A_i$ המקיימים $\varphi_i^j f_j = f_i$ $\forall i\le j$ יש מורפיזם $\eta : X\to \varprojlim A_i$ יחיד כך

שהדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
 & \varprojlim A_i \arrow[d, "p_j"'] \arrow[dr, "p_i"] & \\
 & A_j \arrow[r, "\varphi_i^j"] & A_i \\
X \arrow[uu, dashed, bend left, "\exists!\,\eta"] \arrow[ur, "f_j"] \arrow[urr, "f_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

הערה: 'כרגיל' אם הגבול קיים אז הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם יחיד המשמר את ההעתקות הקנוניות.

דוגמאות:

(1) אם $I=\{1,2,3\}$ עם יחס הסדר

$$\begin{tikzcd}
2 \arrow[dr, dash] & & 3 \arrow[dl, dash] \\
 & 1 &
\end{tikzcd}$$

! $\varphi_1^2: A_2 \to A_1$, $\varphi_1^3: A_3 \to A_1$ אז $\varprojlim A_i$ הוא המשיכה לאחור של הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd}
 & A_2 \arrow[d, "\varphi_1^2"] \\
A_3 \arrow[r, "\varphi_1^3"] & A_1
\end{tikzcd}$$

(2) אם I כלשהו, ויחס הסדר הוא טריוויאלי (אין אף זוג שמקיים $i \le j$)

אז $\varprojlim A_i = \prod A_i$.

③ אם $A_i=\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ וההעתקות הן $\varphi_i^j:\mathbb{Z}/p^j\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$, $i\le j$

$a+p^j\mathbb{Z}\mapsto a+p^i\mathbb{Z}$

אז $\mathbb{Z}_p$ הוא הגבול ההפוך. נוכיח זאת בהמשך.

משפט: הגבול ההפוך בקטגוריה של R-מודולים קיים.

הוכחה: תהי I קס"ח ו-$\{M_i,\varphi_i^j\}$ מערכת הפוכה של מודולים.

נסמן
$$S=\{(m_i)\in\prod_{i\in I}M_i \mid \varphi_i^j(m_j)=m_i\ \ \forall i\le j\}$$

אז S הוא תת-מודול של המכפלה $\prod_{i\in I}M_i$, ונראה ש-S יחד עם הצמצומים של ההטלות $p_i:\prod M_i\to M_i$ ל-S, הוא גבול הפוך.

נניח ש-N R-מודול ו-$f_i:N\to M_i$ מקיימים $\underbrace{\varphi_i^j f_j=f_i}_{(*)}$ $\forall i\le j$.

$$\begin{tikzcd} & M_j \arrow[r, "\varphi_i^j"] & M_i \\ N \arrow[ur, "f_j"] \arrow[urr, "f_i"'] & & \end{tikzcd}$$

נגדיר $\eta(n):=(f_i(n))$. אז $(*)$ אומר ש-$\eta(n)\in S$.

ומתקיים $p_i\eta(n)=f_i(n)$ ו-η נקבעת ביחידות לפי תנאי זה. $\square$

נחזור לדוגמא 3:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} = \left\{ (x_i) \in \prod_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z} \;\middle|\; x_j \equiv x_i \mod p^i \ \forall i \leq j \right\}$$

לפי הבניה של הגבול.

אבל
$$\mathbb{Z}_p \longrightarrow \varprojlim_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$$
$$a_0 + a_1 p + \cdots \longmapsto (a_0, a_0 + a_1 p, a_0 + a_1 p + a_2 p^2, \cdots)$$

איזומורפיזם.

דוגמא 4: נביט באוסף $\{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\}$ כאשר יחס הסדר על $\mathbb{N}$ הוא לפי חלוקה: $m \preceq n \iff m \mid n$.

נגדיר העתקות
$$\varphi^n_m : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$
$$a + n\mathbb{Z} \longmapsto a + m\mathbb{Z}$$

מקבלים מערכת הפוכה:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \arrow[ddr] & \\
 & & \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[r] & \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \arrow[r] & (0) \\
 & & \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \arrow[ur] & & \\
 & & \mathbb{Z}/15 \arrow[uur] \arrow[r] & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \arrow[uur] & \\
 & & & \vdots &
\end{tikzcd}$$

$$? = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$= \left\{ (a_n) \in \prod_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \;\middle|\; a_n \equiv a_m \pmod m,\ m \prec n \right\}$$

וכן הלאה...

את הגבול ההפוך של מערכת זו מסמנים $\hat{\mathbb{Z}}$.

למשל, כבר פגשנו את $\hat{\mathbb{Z}}$: אם $\mathbb{F}_{p^n}$ השדה הסופי עם p^n איברים

אז $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, כאשר $\sigma: x \mapsto x^p$ (פרובניוס) הוא היוצר.

אז ההרחבות הסופיות של $\mathbb{F}_p$ נראות כך:

$$\begin{tikzcd}
\vdots & \mathbb{F}_{p^6} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \vdots \\
\mathbb{F}_{p^2} & & \mathbb{F}_{p^3} & \mathbb{F}_{p^5} \\
 & \mathbb{F}_p \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] \arrow[urr, dash] & &
\end{tikzcd}$$

כלומר $\mathbb{F}_{p^m} \subset \mathbb{F}_{p^n} \iff m \mid n$.

יש העתקות טבעיות $\varphi^n_m : Gal(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \longrightarrow Gal(\mathbb{F}_{p^m}/\mathbb{F}_p)$

כאשר $m|n$.

$$\begin{array}{ccc} \cong & & \cong \\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \end{array}$$

אם נסמן ב- $\overline{\mathbb{F}_p}$ סגור אלגברי של $\mathbb{F}_p$ שבו ישבו כל ההרחבות

הסופיות הנ"ל, אז יש העתקות $p_n : Gal(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p) \longrightarrow Gal(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$

ולמעשה $Gal(\overline{\mathbb{F}_p}/\mathbb{F}_p)$ הוא הגבול ההפוך $\cong \hat{\mathbb{Z}}$.

תרגיל 41: הוכיחו ש- $\hat{\mathbb{Z}} \cong \prod_{p \text{ ראשוני}} \mathbb{Z}_p$.

כלומר, $\varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \prod_{p \text{ ראשוני}} \varprojlim_i \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$.

הדרכה: השתמשו בתכונות האוניברסליות ובמשפט השאריות הסיני

$$\mathbb{Z}/p_1^{r_1}\cdots p_k^{r_k}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{r_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k^{r_k}\mathbb{Z}$$

תרגיל 42:

הראו שהמכפלה הקרטזית של משפחה $\{G_i \mid i \in I\}$ של חבורות היא מכפלה קטגורית בקטגוריה של חבורות.

הראו שלכל מערכת הפוכה של חבורות $\{G_i, \varphi_i^j\}$ קיים הגבול ההפוך.

תרגיל 43 (הגדרה): תהא G חבורה (ללא דרישת סופיות, המקרה המעניין כאן הוא דווקא האינסופי) ונסמן

$$\mathcal{N} := \{ N \mid N \trianglelefteq G,\ [G:N] < \infty \}$$

= אוסף תתי החבורות הנורמליות של G מאינדקס סופי.

הקבוצה $\mathcal{N}$ מצוידת בסדר חלקי על ידי הכלה. נגדיר מערכת הפוכה של חבורות. החבורות $\{ G/N \mid N \in \mathcal{N} \}$

ההומומורפיזמים $G/N \to G/N'$ העתקת המנה הקנונית כאשר $N \subseteq N'$

לגבול ההפוך $\hat{G} := \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N$ קוראים ההשלמה הפרוסופית של G.

(שימו לב ש- $\varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא מקרה פרטי של בניה זו)

(1) הראו שאוסף הקוסטים $\{ gN \mid g \in G, N \in \mathcal{N} \}$ מגדיר בסיס לטופולוגיה על G (אלו הן הקבוצות הפתוחות)

(2) הראו ש: $\{e\} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N \iff$ הטופולוגיה האוסדורפית.

הראו שבמקרה כזה $G \to \hat{G}$ שיכון צפוף.

$$g \mapsto (gN)_{N \in \mathcal{N}}$$

(3) הראו ש- $\hat{G}$ יש את התכונה האוניברסלית הבאה. לכל חבורה סופית H (שנצייד אותה בטופולוגיה הדיסקרטית) והומו' $\varphi: G \to H$ יש הומומורפיזם רציף η יחיד כך שהדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd} & \hat{G} \arrow[dr, dashed, "\eta"] & \\ G \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"] & & H \end{tikzcd}$$

(4) הראו ש- $\hat{G}$ קומפקטי.