# גבול ישר

**הגדרה:** תהי $I$ קבוצה סדורה חלקית ו $\mathcal{C}$ קטגוריה.
מערכת ישרה בקטגוריה $\mathcal{C}$ מעל $I$ היא אוסף עצמים $\{A_i \mid i\in I\}$
יחד עם אוסף מורפיזמים $\{\varphi^i_j : A_i \to A_j \mid i\le j\}$ המקיימים

(1) $\varphi^i_i = 1_{A_i}$

(2) $\varphi^j_k \varphi^i_j = \varphi^i_k$ לכל שלשה $i\le j\le k$.

גבול ישר של מערכת ישרה הוא עצם בקטגוריה $\mathcal{C}$ שמסומן

$$\varinjlim_{i\in I} A_i$$

עם מורפיזמים $\lambda_i : A_i \to \varinjlim A_i$ $\forall i\in I$ כך שמתקיים

(1) תאימות עם המערכת: $\lambda_j\circ\varphi^i_j = \lambda_i$ $\forall i\le j$

(2) אוניברסליות: לכל עצם $X$ עם מורפיזמים $f_i : A_i \to X$ המקיימים
$f_j\varphi^i_j = f_i$ $\forall i\le j$ יש מורפיזם $\eta : \varinjlim A_i \to X$ יחיד כך
שהדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
A_i \arrow[urr, bend left, "f_i"] \arrow[r, "\varphi^i_j"] \arrow[drr, bend right, "\lambda_i"'] & A_j \arrow[ur, "f_j"] \arrow[dr, "\lambda_j"] & \\
 & & \varinjlim_{i\in I} A_i \arrow[uu, dashed, "\exists!\eta"']
\end{tikzcd}$$

**הערה:** 'כרגיל' אם הגבול קיים אז הוא יחיד עד כדי איזומורפיזם יחיד המתחלף עם ההעתקות בדיאגרמה.

דוגמאות:

(1) אם $I=\{1,2,3\}$ עם יחס הסדר

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & 1 \arrow[dl, no head] \arrow[dr] & \\
2 & & 3
\end{tikzcd}$$

! $\varphi^1_2 : A_1 \to A_2$ , $\varphi^1_3 : A_1 \to A_3$ אז $\varinjlim A_i$ הוא הדחיפה המוכר של הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\varphi^1_2"] \arrow[d, "\varphi^1_3"'] & A_2 \\
A_3 &
\end{tikzcd}$$

(2) אם $I$ כלשהו, ויחס הסדר הוא טריוויאלי (אין אף זוג שונים $i\le j$) אז $\coprod_{i\in I} A_i = \varinjlim A_i$ .

③ אם $A_n = \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ , $\varphi^m_n : A_m \hookrightarrow A_n$ השיכון כאשר $m|n$

אז $\mathbb{Q} = \bigcup_n \frac{1}{n}\mathbb{Z} = \varinjlim \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ . נחזור לדוגמא זו בהמשך.

**משפט:** הגבול הישר בקטגוריה של $R$-מודולים קיים.

**הוכחה:** תהי $I$ קס"ח ו- $\{M_i , \varphi^j_i\}$ מערכת ישרה של מודולים.

נסמן $S = \{ (m_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i \mid \varphi^i_j(m_i) = m_j \quad \forall i \leq j \}$

ויהי $S$ תת-המודול של הסכום הישר $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ($= \coprod_{i\in I} M_i$ , הקו-מכפלה בקטגוריה)

הנוצר על ידי איברים מהצורה

$m_i \in M_i$ $\quad (0,0,\dots,0,m_i,0,\dots,0,-\varphi^i_j(m_i),0,\dots,0)$

(כשעוברים על כל $i \in I$ וכל $m_i \in M_i$)

נגדיר $D := \bigoplus_{i\in I} M_i / S$ ומורפיזמים $\lambda_i : M_i \to D$

שהם ההרכבה של $M_i \to \bigoplus M_i$ עם ההעתקה המנה $\bigoplus M_i \to D$ .

**תרגיל 44:** הראו ש- $D$ יחד עם המורפיזמים $\lambda_i$ הוא הגבול הישר

של המערכת. □

**הגדרה:** קבוצה סדורה חלקית $I$ נקראת **קבוצה מכוונת** (directed set) אם לכל $i,j\in I$ קיים $k\in I$ כך ש- $k\geq i,j$.

**הבחנה:** באופן כללי האיברים בגבול הישר הם מהצורה $S+(m_i)$ כאשר $m_i=0$ פרט למספר סופי של $i\in I$.

אבל אם קבוצת האינדקסים **מכוונת** כל איבר בגבול הוא מהצורה

$$(0,0,\dots,0,m,0,\dots,0)+S$$

**הסבר:** נניח ש- $(m_i)+S$ מקיים $m_i\neq 0$ רק עבור $i\in J$, $J$ סופית. נבחר $i\leq k$ לכל $i\in J$ ונגדיר $m=\sum_{i\in J}\varphi_k^i(m_i)\in M_k$

ואז

$$(m_i)-(0,0,\dots,\underset{\overset{\uparrow}{k}}{m},0,\dots,0)=$$

$$\sum_{i\in J}(0,\dots,0,\overset{i}{m_i},0,\dots,0,-\overset{k}{\varphi_k^i(m_i)},0,\dots,0)\in S$$

כלומר, $(m_i)+S=(0,\dots,0,m,0,\dots,0)+S$.

תרגיל 24: אם $I$ קבוצה של תתי מודולים של מודול $N$ עם סדר מכוון,

כלומר לכל $M,M'\in I$ $M\subseteq M'$ או $M'\subset M$, אז $\varinjlim M_i=\bigcup_i M_i$.

דוגמא: אם $M_n=\frac{1}{n}\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, מסודרים ע"י הכלה אז

$$\varinjlim \frac{1}{n}\mathbb{Z}=\bigcup\frac{1}{n}\mathbb{Z}=\mathbb{Q}$$

אלגברת הנבטים

נביט בקבוצת הקבוצות הפתוחות ב־ $\mathbb{R}$ המכילות את $x\in\mathbb{R}$. נסמן אותה גם כ־$J_x$,

ונגדיר יחס סדר חלקי לפי הכלה הפוכה: $\mathcal{U}\precsim V$ אמ"ם $\mathcal{U}\supseteq V$

אז $J_x$ קבוצה מכוונת:

$$\forall \mathcal{U},V\in J\qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{U}\cap V \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ V & & \mathcal{U} \end{tikzcd}$$

נסמן

$$\forall\mathcal{U}\in J_x\quad F(\mathcal{U}):=\{f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}\ \text{רציפה}\}$$

מקבלים מערכת מכוונת ע"י העתקות הצמצום

$$\rho^{\mathcal{U}}_V: F(\mathcal{U})\longrightarrow F(V)\qquad \forall V\subseteq\mathcal{U}$$
$$f\longmapsto f|_V$$

אלגברת הנבטים ב- x מוגדרת

$$F_x := \varinjlim_{U\in J_x} F(U)$$

היא מכילה מחלקות שקילות של פונקציות

$$F_x = \bigoplus_{U\in J_x} F(U) \Big/ \langle (0,\dots,0,\underset{\overset{\uparrow}{U}}{f},0,\dots,0,-f|_V,0,\dots,0) \mid f\in F(U),\, U\in J_x \rangle$$

אם נזהה בין $f$ לתמונתו $(0,\dots,0,f,0,\dots,0)$ נקבל ששני איברים

נקבל ששני איברים במנה

בקואו' ה-U

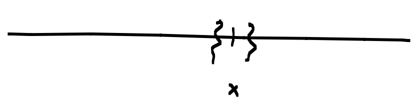
$$(0,\dots,0,f,0,\dots,0)+S$$

$$(0,\dots,0,g,\dots)+S$$

בקואו' ה-V

שווים אם"ם $f|_{U\cap V} = g|_{U\cap V}$.

לכן אלגברה שאיבריה (מחלקות שקילות של) פונקציות בסביבה אינפיניטסימלית של x.



שימו לב שזו אלגברה אינסוף-ממדית:

תרגיל 46: הוכיחו שאם $p,q\in\mathbb{R}[x]$ וגם $p\neq q$ אזי תמונותיהם ב- $F_x$ שונות.