הרצאה 14

# העתקות טבעיות בין פונקטורים

**הגדרה:** תהיינה $\mathcal{C}$ ו- $\mathcal{D}$ קטגוריות ו- $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ פונקטורים.

העתקה טבעית בין $F$ ו- $G$, שסומנת $\tau: F\to G$ היא משפחה של מורפיזמים

$$\tau_X : F(X) \longrightarrow G(X) \qquad (\text{לכל } X\in Ob(\mathcal{C}))$$

כך שלכל מורפיזם $f:X\to Y$ בקטגוריה $\mathcal{C}$, הדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\tau_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\tau_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

אם כל המורפיזמים $\tau_X$ הם איזומורפיזמים אז $\tau:F\to G$ נקראת שקילות טבעית.

דוגמא:

$C = \text{CommRing } 1 =$ הקטגוריה של חוגים קומוטטיביים עם יחידה

$D = \text{Groups} =$ הקטגוריה של חבורות

ונביט בפונקטורים

$$U : \text{CommRing } 1 \longrightarrow \text{Groups}$$

(עצמים) $R \longmapsto R^{\times} = \{$ חבורת האיברים ההפיכים ב-$R$ $\}$

(מורפיזמים) $\left(R \xrightarrow{f} S\right) \longmapsto \left(R^{\times} \xrightarrow{f|_{R^{\times}}} S^{\times}\right)$

$$GL_n : \text{CommRing } 1 \longrightarrow \text{Groups}$$

$$R \longmapsto GL_n(R)$$

$$\left(R \xrightarrow{f} S\right) \longmapsto \begin{array}{c} GL_n(R) \xrightarrow{GL_n(f)} GL_n(S) \\ (a_{ij}) \longmapsto (f(a_{ij})) \end{array}$$

הבהרות

① $GL_n(R)$ הוא המטריצות ההפיכות ב- $M_n(R)$, כלומר, מטריצות $A$ עבורן קיימת מטריצה $B$ כך ש- $A \cdot B = B \cdot A = I_n$

מטריצת היחידה

② מתקיים: $A$ הפיכה $\Longleftrightarrow$ $\det(A) \in R^{\times}$ (באנלוגיה מדויקת לטענה של שדה עם אותה הוכחה בדיוק)

③ קל לראות ש- $GL_n(f)$ אכן הומו׳ של חבורות כי כפל מטריצות מוגדר
כפולינומים בכניסות המטריצה, כלומר

אם
$$(a_{ij})(b_{ij}) = \Big(\sum_k a_{ik} b_{kj}\Big)_{ij}$$

אז
$$\big(f(a_{ij})\big)\big(f(b_{ij})\big) = \Big( f\big( \sum_k a_{ik} b_{kj}\big)\Big)$$

④ $U$ שהוגדר למעלה $= GL_1$ .

נגדיר עכשיו העתקה טבעית בין הפונקטורים $GL_n$, $U$ : $\quad det : GL_n \longrightarrow U$

$$\forall R \in CommRings1 \quad , \quad det_R : GL_n(R) \longrightarrow R^\times$$
$$A \longmapsto \det A$$

נבדוק שהדיאגרמה המתאימה קומוטטיבית , יהי $f : R \to S$ מורפיזם

$$\begin{tikzcd}
GL_n(R) \arrow[r, "GL_n(f)"] \arrow[d, "det_R"'] & GL_n(S) \arrow[d, "det_S"] \\
R^\times \arrow[r, "f|_{R^\times}"] & S^\times
\end{tikzcd}$$

אכן:

$$\det_S\left(GL_n(f)(a_{ij})\right) = \det_S\left(f(a_{ij})\right)$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} f(a_{1\sigma(1)})\cdots f(a_{n\sigma(n)})$$

כי $f$ הומו' של חוגים

$$= f\left(\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{sgn(\sigma)} a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\right)$$

$$= f|_{R^\times}\left(\det_R(a_{ij})\right)$$

**תרגיל 47:** יהי $R$ חוג קומוטטיבי עם יחידה ונסמן ב- ${}_R\mathrm{Mod}$ את הקטגוריה של $R$-מודולים. נביט בשני פנקטורים

① (פנקטור הזהות) $Id : {}_R\mathrm{Mod} \longrightarrow {}_R\mathrm{Mod}$

② $Hom_R(R,-) : {}_R\mathrm{Mod} \longrightarrow {}_R\mathrm{Mod}$

(עצמים) $M \longmapsto Hom_R(R,M)$

(מורפיזמים) $\left(M \xrightarrow{f} N\right) \longmapsto \left(Hom_R(R,M) \xrightarrow{Hom_R(R,f)} Hom_R(R,N)\right)$

$$\varphi \longmapsto f\circ\varphi$$

הערה: $Hom_R(R,M)$ הנו $R$-מודול ע"י $(r\cdot f)(x) = f(rx)$.

הוכיחו שההעתקה $\theta : Hom_R(R,-) \to Id$ המוגדרת על עצמים $M \in {}_R\mathrm{Mod}$ ע"י

$$\theta_M : Hom_R(R,M) \longrightarrow M$$
$$f \longmapsto f(1)$$

היא העתקה טבעית של פנקטורים.

**הגדרה:** פונקטור $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ נקרא שקילות קטגוריות אם קיים פונקטור $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ כך שיש שקילות טבעית בין $G \circ F$ ל- $Id_{\mathcal{C}}$ ובין $F \circ G$ ל- $Id_{\mathcal{D}}$.

**תרגיל 48:** הוכיחו ש-

$$* : Vect_F^{fin.dim} \longrightarrow Vect_F^{fin.dim}$$

$$V \longmapsto V^*$$

קטגוריית המרחבים הוקטוריים ממימד סופי מעל שדה $F$

מגדיר שקילות קטגוריות, דהיינו שיש שקילות טבעית בין הפונקטורים $* \circ *$ ל- $Id$.