פונקטורים צמודים

תזכורת: נזכר בשני פונקטורים שפגשנו בהם.

① יהי k שדה. לכל קבוצה X התאמנו את המרחב הוקטורי עם בסיס X

$$F(X) := \{ f : X \to k \mid \text{ל-}f\text{ תומך סופי} \}$$
$$= \mathrm{Span}_k \{ \delta_x \mid x \in X \}$$

אם $X \xrightarrow{f} Y$ פונקציה, נגדיר $F(f) : F(X) \to F(Y)$ ע"י $\delta_x \mapsto \delta_{f(x)}$ שמורחבת באופן יחיד להעתקה לינארית.

ההתאמה $X \mapsto F(X)$, $f \mapsto F(f)$ היא פונקטור $F : Sets \to Vect$

② הפונקטור השוכח $\mathcal{U} : Vect_k \to Sets$

לכל מרחב וקטורי V התאמנו קבוצה ע"י $\mathcal{U}(V) = \{$ כל איברי $V \}$

אם $T : V \to W$ העתקה לינארית שמתאימה לה העתקה של קבוצות $\mathcal{U}(T) : \mathcal{U}(V) \to \mathcal{U}(W)$, פשוט שוכחים ש-$T$ לינארית.

נשים לב שמתקיים $\tau_{X,V} : Hom_{Vect}(F(X), V) \simeq Hom_{Sets}(X, \mathcal{U}(V))$

לכל קבוצה X ולכל מרחב וקטורי V. (כי העתקה לינארית נקבעת לפי ערכיה על בסיס)

כאשר $\tau_{X,V}$ מתאימה לכל העתקה לינארית $F(X) \xrightarrow{T} V$ את $U(T)$.

יתר על כן ההתאמה טבעית ב- X וב- V:

אם $X \xrightarrow{f} Y$ פונקציה אז הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd}
T \in \mathrm{Hom}_{Vect}(F(Y),V) \arrow[r, "\tau_{Y,V}"] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_{Sets}(Y,U(V)) \arrow[d] & \varphi \arrow[d, mapsto] \\
T\circ F(f) \in \mathrm{Hom}_{Vect}(F(X),V) \arrow[r, "\tau_{X,V}"] & \mathrm{Hom}_{Sets}(X,U(V)) & \varphi\circ f
\end{tikzcd}$$

קומוטטיבית, וכן אם $V \xrightarrow{T} W$ העתקה לינארית אז

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_{Vect}(F(X),V) \arrow[r, "\tau_{X,V}"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{Sets}(X,U(V)) \arrow[d] \\
T\circ S & \mathrm{Hom}_{Vect}(F(X),W) \arrow[r, "\tau_{X,W}"] & \mathrm{Hom}_{Sets}(X,U(W))
\end{tikzcd}$$

קומוטטיבית. זוג הפונקטורים (F,U) הם בעצמם פונקטורים צמודים.

הערה לגבי הטבעיות: אפשר לקשר אותה באופן שנוגע להגדרה, מתקיים העתקה טבעית בין שני הפונקטורים

$$\mathrm{Hom}_{Vect}(F(\cdot),V) : Sets \to Sets$$

$$\mathrm{Hom}_{Sets}(\cdot, U(V)) : Sets \to Sets$$

לבין שני הפונקטורים

$$\mathrm{Hom}_{Vect}(F(X), \cdot) : Vect_k \to Sets$$

$$\mathrm{Hom}_{Sets}(X, \mathcal{U}(\cdot)) : Vect_k \to Sets$$

הגדרה: תהיינה $\mathcal{C}$ ו-$\mathcal{D}$ קטגוריות. פונקטורים $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ נקראים צמודים אם לכל שני עצמים $X\in\mathcal{C}$ ו-$Y\in\mathcal{D}$ יש התאמה תג'ע לכל $\tau_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y))$ שהיא טבעית ב-X וב-Y.

כלומר: לכל $f: X \to X'$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\tau_{X,Y}"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X'),Y) \arrow[r, "\tau_{X',Y}"] \arrow[u, "F(f)^*"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X',G(Y)) \arrow[u, "f^*"']
\end{tikzcd}$$

כאשר f^* היא $f^*(\varphi) = f\circ\varphi$ ובאופן דומה $F(f)^*$.

ולכל $g: Y \to Y'$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \arrow[r, "\tau_{X,Y}"] \arrow[d, "g_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y)) \arrow[d, "G(g)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,G(Y'))
\end{tikzcd}$$

כאשר $g_*(\varphi) = \varphi\circ g$.

F נקרא צמוד שמאלי של G, ו-G צמוד ימני של F

ונאמר ש-(F, G) צמודים (כזוג סדור).

משפט: יהיו (F, G) פונקטורים צמודים, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

אז F שומר על כל גבולות ישרים ו-G שומר על גבולות הפוכים.

באופן יותר מדויק: אם $\varinjlim X_i$ קיים ב-$\mathcal{C}$ אז $\varinjlim F(X_i)$

קיים ב-$\mathcal{D}$ ומתקיים $\varinjlim_{i\in I} F(X_i) = F(\varinjlim X_i)$.

אם $\varprojlim_{i\in I} Y_i$ קיים ב-$\mathcal{D}$ אז $\varprojlim_{i\in I} G(Y_i)$ קיים ב-$\mathcal{C}$

ומתקיים $\varprojlim_{i\in I} G(Y_i) = G(\varprojlim Y_i)$.

תרגיל 49: נסמן ב- $U: Group \to Sets$ את הפונקטור השוכח.

נגדיר פונקטור $F: Sets \to Groups$. לכל קבוצה נתאים את החבורה החופשית עם יוצרים $x \in X$.

למשל: אם $X = \{a\}$ $\quad F(X) = a^{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}$

אם $X = \{a,b\}$ $\quad F(X) = \left\{\text{החבורה החופשית בשני יוצרים}\right\} = \left\{\text{אוסף המילים המצומצמות באותיות } a, a^{-1}, b, b^{-1}\right\}$

(מילה מצומצמת: $abab^3a^{-1}$, מילה שאינה מצומצמת: ab^2b^3a)

נשים לב שאם $f: X \to Y$ פונקציה אז יש הומומורפיזם יחיד של חבורות $F(f): F(X) \to F(Y)$ שמרחיב את f.

הראו ש- (F,U) צמודים. הראו ש- (U,F) אינם צמודים.

יהיו (F, G) פונקטורים צמודים, $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

אם $X \in Ob(\mathcal{C})$, ונסמן $Y = F(X)$, אז ההתאמה החח"ע ועל

$$\tau_{X,Y} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq Hom(X, G(Y))$$

נראית כך:

$$\tau = \tau_{X, F(X)} : Hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(X)) \xrightarrow{\sim} Hom_{\mathcal{C}}(X, GF(X))$$

ובצד שמאל יש איבר מיוחד, $1_{F(X)}$. נגדיר

$$\forall X \in Ob(\mathcal{C}) \qquad \eta_X : X \to GF(X), \quad \eta_X = \tau(1_{F(X)})$$

טענה: $\eta : Id_{\mathcal{C}} \to GF$ היא העתקה טבעית בין פונקטורים.

הוכחה: תרגיל 50.