

פונקטארישע צאגונג אדאלאג

עני פונקטארישע  $e \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} D$  פונקטארישע צאגונג אדאלאג פאר  $X \in \text{Ob}(C)$ ,  $Y \in \text{Ob}(D)$  ישר.

העראמא העצ אדאלאג  $\tau_{X,Y} : \text{Hom}_C(F(X), Y) \cong \text{Hom}_D(X, G(Y))$  פאר  $X \rightarrow Y$ .

$F$  פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $C \rightarrow D$  און  $G$  פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $D \rightarrow C$ .

למשל: אדאלאג  $(F, G)$  פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $C \rightarrow D \rightarrow C$ ,  $F: C \rightarrow D$ ,  $G: D \rightarrow C$  און

$F$  פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $C \rightarrow D$  און  $G$  פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $D \rightarrow C$ .

האבאג: ערסא  $\{X_i, \psi_i\}_{i \in I}$  לעצנדע ישרס פאר  $C$  און  $\{F(X_i), F(\psi_i)\}_{i \in I}$  לעצנדע ישרס פאר  $D$ .

האבאג: ערסא  $\{X_i, \psi_i\}_{i \in I}$  לעצנדע ישרס פאר  $C$  און  $\{F(X_i), F(\psi_i)\}_{i \in I}$  לעצנדע ישרס פאר  $D$ .

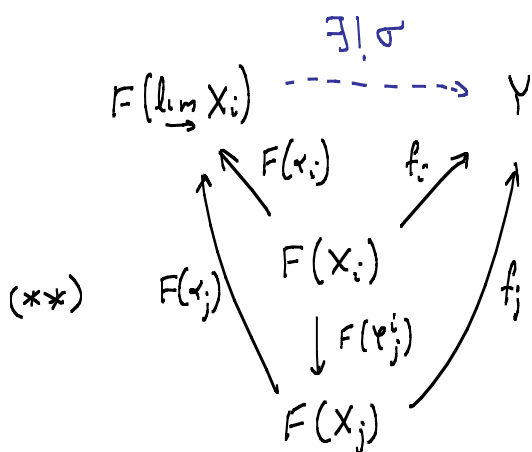
$$(*) \quad \lim_{i \in I} F(X_i) \cong F(\lim_{i \in I} X_i)$$

פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $(C, D)$ :

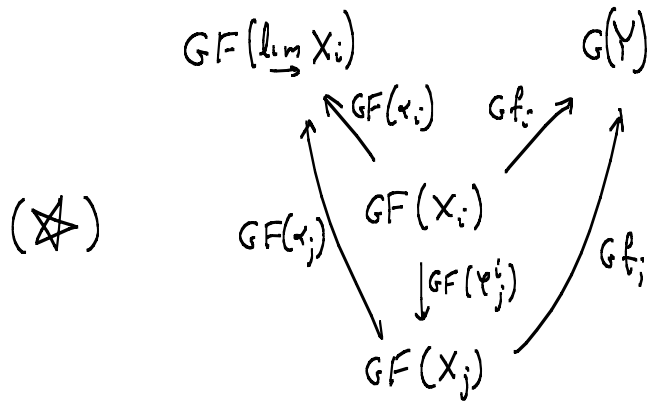
און פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $(Y, f_i: F(X_i) \rightarrow Y)$

און פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $C \rightarrow D$  און פונקטארישע צאגונג אדאלאג  $D \rightarrow C$ .

(און  $(*)$  אדאלאג פונקטארישע צאגונג אדאלאג)



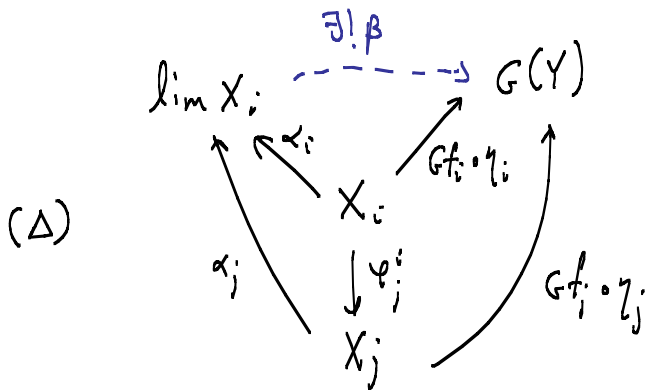
נתון  $G$  פונקטור גורם-גורם :



אנחנו יודעים שיש מורפיזמים  $\eta$  כך שדיאגרמה הבאה קומוטטיבית



אם כן עבור (★) אדיאגרמה הימנית נטן דיאגרמה קומוטטיבית (יך התקף השווה)



למרבית (קואם) (הקור) היש ב-  $C$  יש מורפיזם  $\beta$  יחיד כך שדיאגרמה כזו קומוטטיבית

אנחנו רוצים להוכיח את הטענה הזו:  $\tau: \text{Hom}_D(F(\lim X_i), Y) \cong \text{Hom}_C(\lim X_i, G(Y))$

$$\tau: \text{Hom}_D(F(\lim X_i), Y) \cong \text{Hom}_C(\lim X_i, G(Y))$$

$$\tau^{-1}(\beta) \longleftarrow \beta$$

נתבונן ב-  $\sigma: F(\lim X_i) \rightarrow Y$  מפה מ-  $F(\lim X_i)$  אל-  $Y$ , כלומר

①  $\forall i \in I \quad \sigma \circ F(\alpha_i) = f_i$  כלומר,  $\sigma$  מקיים את התנאים, כלומר

②  $\sigma$  יחידה.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_D(F(X), Y) & \xrightarrow{\tau} & \text{Hom}_C(X, G(Y)) \\ \uparrow F(f)^* & & \uparrow f^* \end{array}$$

הערה:  $X \xrightarrow{f} X'$  ב-  $\mathcal{C}$  הערה:  $X \xrightarrow{f} X'$  ב-  $\mathcal{C}$

$$\text{Hom}_D(F(X'), Y) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}_C(X', G(Y))$$

כאן  $X \xrightarrow{f} X' := X_i \xrightarrow{\alpha_i} \lim X_i$  ב-  $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_D(F(X_i), Y) & \xrightarrow{\tau} & \text{Hom}_C(X_i, G(Y)) \\ \uparrow F(\alpha_i)^* & & \uparrow \alpha_i^* \\ \text{Hom}_D(F(\lim X_i), Y) & \xrightarrow{\tau} & \text{Hom}_C(\lim X_i, G(Y)) \end{array}$$

כלומר,  $\tau \circ F(\alpha_i)^* = \alpha_i^* \circ \tau$  כלומר  $\tau$  יחידה.

$$F_i(\alpha_i)^* \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \alpha_i^* : \text{Hom}_e(\lim X_i, G(Y)) \rightarrow \text{Hom}_D(F(X_i), Y)$$

(כ)  $\tau$  איז ענין האומאמפיזיזם פון  $\beta$  אונטן

$$F(\alpha_i)^*(\tau^{-1}(\beta)) = \tau^{-1}(\alpha_i^*(\beta))$$

$\sigma$  אומאמפיזיזם  $\parallel$

$\alpha_i^*$  אומאמפיזיזם  $\parallel$

$$F(\alpha_i)^*(\sigma)$$

$$\tau^{-1} \circ \beta \circ \alpha_i$$

(ד)  $\parallel$

$\sigma$  אומאמפיזיזם  $\parallel$

$$(i) \quad \sigma \circ F(\alpha_i) = \tau^{-1} \circ G f_i \circ \gamma_i$$

אומאמפיזיזם  $\gamma_i: Y' \rightarrow Y$  אונטן פון  $\tau$  אומאמפיזיזם  $\sigma$  אונטן פון  $\tau$

$$\text{Hom}_D(F(X), Y) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}_e(X, G(Y))$$

$$\downarrow \sigma_*$$

$$\downarrow G(g)_*$$

$$\text{Hom}_D(F(X), Y) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}_e(X, G(Y))$$

אונטן פון  $\tau$  אומאמפיזיזם  $\gamma_i: Y' \rightarrow Y := F(X_i) \xrightarrow{f_i} Y$  אונטן פון  $\tau$

$$\text{Hom}_D(F(X_i), F(X_i)) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}_e(X_i, GF(X_i))$$

$$\downarrow f_{i*}$$

$$\downarrow G(f_i)_*$$

$$\text{Hom}_D(F(X_i), Y) \xrightarrow{\tau} \text{Hom}_e(X_i, G(Y))$$

$$\tau \circ f_{i*} = G(f_i)_* \circ \tau : \text{Hom}_D(F(X_i), F(X_i)) \rightarrow \text{Hom}_e(X_i, G(Y))$$

כולומר

רצ"ב  $1_{F(X_i)}$  ארנבא :

$$\tau \circ f_{i*} (1_{F(X_i)}) = G(f_i)_* \tau (1_{F(X_i)})$$

|| יצאנו ה-1 ||                      || יצאנו  $\eta_i$  ||

$$(ii) \quad \tau \circ f_i = G(f_i)_* \eta_i$$

$$(i) \quad F(\alpha_i)^* \sigma = \tau^{-1} \circ G f_i \circ \eta_i \quad \text{איגוד עם}$$

$$\Rightarrow \sigma \circ F(\alpha_i) = f_i \quad \text{ארנבא}$$

תרגיל 15: הניאן  $\sigma$  יאיבד (שמתייחס (\*\*)).

הוכחה הטובה והפשוטה ביותר, כזוהי, פשוט הוכחה. ארנבא האיברים.  $\square$