פונקטורים צמודים וגבולות

שני פונקטורים $\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$ נקראים צמודים אם לכל $X \in Ob(\mathcal{C})$, $Y \in Ob(\mathcal{D})$ ישנה התאמה טבעית $\tau_{X,Y} : Hom_{\mathcal{C}}(F(X), Y) \simeq Hom_{\mathcal{D}}(X, G(Y))$ שהינה טבעית ב-X ו-Y.
F נקרא צמוד שמאלי של G ו-G צמוד ימני של F.

משפט: אם (F,G) פונקטורים צמודים כאשר $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ אזי F שומר גבולות ישרים ו-G שומר גבולות הפוכים.

הוכחה: תהי $\{X_i, \varphi^i_j\}_{i \in I}$ מערכת ישרה ב-$\mathcal{C}$ שיש לה גבול ישר, $X_i \xrightarrow{\alpha_i} \varinjlim_{i\in I} X_i$.
המערכת $\{F(X_i), F(\varphi^i_j)\}$ ישרה ב-$\mathcal{D}$ ונראה שיש לה גבול ישר ושמתקיים

$$(*) \qquad \varinjlim_{i \in I} F(X_i) \simeq F\left(\varinjlim_{i\in I} X_i\right)$$

נראה את הטענה הבאה (ב-$\mathcal{D}$):

יש להראות לכל $(Y, f_i : F(X_i) \to Y)$

יש מורפיזם σ יחיד כך שהדיאגרמה קומוטטיבית

(אז $(*)$ נובע מהתכונה האוניברסלית)

$$(**) \qquad \begin{tikzcd} F(\varinjlim X_i) \arrow[rr, dashed, "\exists! \sigma"] & & Y \\ & F(X_i) \arrow[ul, "F(\alpha_i)"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "F(\varphi^i_j)"] & \\ & F(X_j) \arrow[uul, bend left, "F(\alpha_j)"] \arrow[uur, bend right, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

נפעיל את G על הדיאגרמה:

$$(\star)\qquad
\begin{tikzcd}
GF(\varinjlim X_i) & & G(Y) \\
& GF(X_i) \arrow[ul, "GF(\alpha_i)"'] \arrow[ur, "Gf_i"] \arrow[d, "GF(\varphi^i_j)"] & \\
& GF(X_j) \arrow[uul, bend left, "GF(\alpha_j)"] \arrow[uur, bend right, "Gf_j"'] &
\end{tikzcd}$$

מתרגיל 50 אנחנו יודעים שיש מורפיזמים η_i ו η כך שהדיאגרמות הבאות קומוטטיביות

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim X_i \arrow[r, "\eta"] & GF(\varinjlim_i X_i) \\
X_i \arrow[u, "\alpha_i"] \arrow[r, "\eta_i"] & GF(X_i) \arrow[u, "GF(\alpha_i)"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X_j \arrow[r, "\eta_j"] & GF(X_j) \\
X_i \arrow[u, "\varphi^i_j"] \arrow[r, "\eta_i"] & GF(X_i) \arrow[u, "GF(\varphi^i_j)"']
\end{tikzcd}$$

לכן שילוב $(\star)$ והדיאגרמה הימנית נותן דיאגרמה קומוטטיבית (רק החלק השמאלי)

$$(\Delta)\qquad
\begin{tikzcd}
\varinjlim X_i \arrow[rr, dashed, "\exists!\beta"] & & G(Y) \\
& X_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "Gf_i\circ\eta_i"] \arrow[d, "\varphi^i_j"] & \\
& X_j \arrow[uul, bend left, "\alpha_j"] \arrow[uur, bend right, "Gf_j\circ\eta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

מהגדרת (קיום) הגבול הישר ב- $\mathcal{C}$ יש מורפיזם β יחיד כך שהדיאגרמה כולה קומוטטיבית.

נסמן $\sigma := \tau^{-1}(\beta)$ תמונתו ההפוכה תחת τ שמממש את הצמידות של F, G:

$$\begin{array}{cccc} \tau: & Hom_{\mathcal{D}}(F(\lim X_i), Y) & \cong & Hom_{\mathcal{C}}(\lim X_i, G(Y)) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \tau^{-1}(\beta) & \longleftarrow\!\shortmid & \beta \end{array}$$

נראה ש- $\sigma: F(\lim X_i) \to Y$ מקיים את הדרישות, כלומר

1. הדיאגרמה $(**)$ קומוטטיבית, כלומר $\sigma \circ F(\alpha_i) = f_i$ $\forall i \in I$.
2. σ יחידה.

לפי הגדרת הצמידות

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\tau"] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ Hom_{\mathcal{D}}(F(X'), Y) \arrow[r, "\tau"] \arrow[u, "F(f)^*"] & Hom_{\mathcal{C}}(X', G(Y)) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

קומוטטיבי לכל $X \xrightarrow{f} X'$

נציב $X_i \xrightarrow{\alpha_i} \lim X_i$ $=:$ $X \xrightarrow{f} X'$ ונקבל:

$$\begin{tikzcd} Hom_{\mathcal{D}}(F(X_i), Y) \arrow[r, "\tau"] & Hom_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \\ Hom_{\mathcal{D}}(F(\lim X_i), Y) \arrow[r, "\tau"] \arrow[u, "F(\alpha_i)^*"] & Hom_{\mathcal{C}}(\lim X_i, GY) \arrow[u, "\alpha_i^*"'] \end{tikzcd}$$

כלומר, $\tau \circ F(\alpha_i)^* = \alpha_i^* \circ \tau$ וכיוון ש- τ הפיכה

$$F_i(\alpha_i)^* \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \alpha_i^* \ : \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(\lim X_i, G(Y)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\left(F(X_i), Y\right)$$

נפעיל את שני המורפיזמים על β ונקבל

$$F(\alpha_i)^*\left(\tau^{-1}(\beta)\right) = \tau^{-1}\left(\alpha_i^*(\beta)\right)$$

|| מהגדרת σ || מהגדרת $*$

$$F(\alpha_i)^*(\sigma) \qquad \tau^{-1}\circ\beta\circ\alpha_i$$

|| מהגדרת $*$ (Δ) ||

$$(i) \qquad \sigma\circ F(\alpha_i) = \tau^{-1}\circ G f_i \circ \eta_i$$

מהדיאגרמה השניה שמקיימת הטבעיות נקבל שלכל $Y' \xrightarrow{g} Y$ מתקיים

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y') \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "g_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y')) \arrow[d, "G(g)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))
\end{tikzcd}$$

בפרט נציב $X := X_i$, $Y' \xrightarrow{g} Y := F(X_i) \xrightarrow{f_i} Y$ ונקבל

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_i), F(X_i)) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "f_{i*}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, GF(X_i)) \arrow[d, "G(f_i)_*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_i), Y) \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, G(Y))
\end{tikzcd}$$

כלומר

$$\tau\circ f_{i*} = G(f_i)_*\circ\tau : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}\big(F(X_i),F(X_i)\big)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\big(X_i,G(Y)\big)$$

נציב $1_{F(X_i)}$ ונקבל:

$$\tau\circ f_{i*}\big(1_{F(X_i)}\big) = G(f_i)_*\circ\tau\big(1_{F(X_i)}\big)$$

|| תכונת ה-1 || הגדרת η_i

$$(ii)\qquad \tau\circ f_i = G(f_i)_*\circ\eta_i$$

ויחד עם

$$(i)\qquad F(\alpha_i)^*\sigma = \tau^{-1}\circ Gf_i\circ\eta_i$$

|| || (ii)

ונקבל

$$\Longrightarrow\qquad \sigma\circ F(\alpha_i) = f_i$$

תרגיל 51: הוכיחו ש- σ יחידה (שמקיימת $(**)$).

הוכחת הטענה הכללית דומה, פשוט הופכים את כל החיצים. $\square$