תבניות בילינאריות

הגדרה: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תבנית בילינארית על V היא העתקה $B : V \times V \to F$ שהיא לינארית בשני הרכיבים.
(כלומר: לכל $v \in V$, $B(v,\cdot) \in V^*$, $B(\cdot, v)$)

- B נקראת סימטרית אם $\forall v,u \in V \quad B(v,u) = B(u,v)$
- B נקראת אנטי-סימטרית אם $\forall v,u \in V \quad B(v,u) = -B(u,v)$
- B נקראת אי-מנוונת אם $\forall v \in V, \quad B(v,\cdot) = 0 \Rightarrow v = 0$

דוגמאות - תבניות בילינאריות בטבע

- אם $F = \mathbb{R}$ כל מכפלה פנימית על $\mathbb{R}^n$ היא בפרט תבנית בילינארית.
(במקרה זה דורשים שהיא תהיה גם סימטרית ואי מנוונת)
מכפלה פנימית מאפשרת הגדרה לעיסוק באורכים וזוויות.

- אם $F = \mathbb{R}^2$ אז $B\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) := xy' - yx'$ היא תבנית בילינארית
(במקרה זה אנטי סימטרית ואי מנוונת)
תבנית כזו מתארת את התכונות של חלקיק הנע במרחב חד מימדי כאשר הקואורדינטות הן (תנע, מיקום).

- באופן כללי לכל מטריצה $A\in M_n(F)$,

$$B(v,w) = v^tAw$$

היא תבנית בילינארית על F^n.

תרגיל 4: הוכח שהמטריצה A סימטרית (אנטי-סימטרית) אמ"ם התבנית B סימטרית (אנטי סימטרית).

- תבנית לורנץ / מכפלת מינקובסקי / יחסות פרטית

אם $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$ מתארים קואורדינטות של מרחב-זמן אז התבנית שמתארת את השמורות (אינווריאנטות) של התנועה היא

$$B\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix}\right) = (x,y,z,t)\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\t'\end{pmatrix} = xx'+yy'+zz'-tt'$$

נדון במרחב זה ביתר פירוט בהמשך.

טענה 6: יש התאמה אח"ע בין תבניות בל $V \setminus F$ כאשר $\dim V = n$ למטריצות $M_{n\times n}(F)$.

הוכחה: נקבע בסיס ל-V $(e_1,\dots,e_n)$ לכל תבנית B נגדיר

$$\varphi : Bil(V) \to M_{n\times n}(F) \quad \text{ע"י} \quad M_{n\times n}(F) \ni \varphi(B) := \left(B(e_i,e_j)\right)_{1\le i,j\le n}$$

ברור $\varphi(B') \neq \varphi(B)$ אז $B \neq B'$. (חח"ע)

מצד שני לכל מטריצה $A \in M_{n\times n}(F)$ אפשר להגדיר תבנית

$$B\left(\sum x_i e_i, \sum y_i e_i\right) := (x_1,\dots,x_n)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

ו- $\varphi(A) = B$. $\square$

איזומורפיזם של מרחבים עם תבנית

יהיו (V,B) ו- (V',B') מרחבים עם תבניות בי-לינאריות. איזומורפיזם בינהם הוא איזומורפיזם לינארי φ שמקיים

$$\forall v,u \in V \qquad B(v,u) = B'\left(\varphi(v),\varphi(u)\right)$$

בדומה למשל, מיון של מרחבים לינאריים (כמה מרחבים לינאריים יש מכל מימד עד כדי איזומורפיזם?), תבניות, מודולים, בדומה למיין כאן מרחבי תבניות.

הנה דרך פשוטה לזהות מרחבי תבניות איזומטריים.

כיוון שיש רק מרחב וקטורי אחד ממימד n, נניח $V=F^n$ ונסתפק לעבוד איתו ולהתייחס לתבניות באמצעות המטריצה שלהן: $B(v,w)=v^tAw$.

אם P מטריצה הפיכה ו-B' תבנית המוגדרת ע"י

$$B'(v,w):=B(Pv,Pw)$$

אז $(F^n,B)\overset{P}{\cong}(F^n,B')$. במקרה כזה המטריצה המייצגת את B' היא P^tAP כי

$$B(Pv,Pw)=(Pv)^t A Pw = v^t(P^tAP)w$$

ולהיפך אם $A'=P^tAP$ אז מרחבי התבניות המתאימים איזומטריים.

נסמן $A\sim A' \iff \exists P\in GL_n(F)\ \ A'=P^tAP$ הנ"ל יחס שקילות הנקרא *חפיפה*.

(נשים לב שזה שונה מיחס הדמיון $A'=P^{-1}AP$).

הערה

למטריצות דומות יש את אותה דטרמיננטה כי $\det(A)=\det(PAP^{-1})$, ולכן אפשר להגדיר דטרמיננטה של העתקה לינארית כלשהי = הדטרמיננטה של מטריצה מייצגת כלשהי.

למטריצות חופפות אין את אותה דטרמיננטה בהכרח:

$$\det(P^tAP)=(\det(P))^2\cdot\det A$$

אבל אם התבניות לא מנוונות מקבלים איבר מוגדר היטב ב-$F^\times/F^{\times 2}$ שנקרא הדיסקרימיננטה.

מיון מרחבים עם תבניות סימטריות

טענה: יהי F שדה ממציין $\neq 2$, ו-V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F.
אז $B: V \times V \to F$ בילינארית סימטרית אז היא ניתנת ללכסון.
(כלומר, יש בסיס של V שבו המטריצה המייצגת את B אלכסונית)

שימו לב: זה שונה מהתבניות מהעתקות ק-ליניאריות.

הוכחה: לכל $v,w \in V$ נסמן $v \perp w$ אם $B(v,w)=0$.
אם $B=0$ אין מה להוכיח.

תרגיל 5: הראו שקיים $0 \neq e_1 \in V$ כך ש- $a_1 := B(e_1,e_1) \neq 0$

יהי $U = \{e_1\}^{\perp} = \{v \in V \mid B(e_1,v)=0\}$. אז $\dim U = \dim V - 1$ (למה?)
לכן באינדוקציה יש בסיס $e_2,\dots,e_n$ של U ומקבלים בסך הכל

$$\left(B(e_i,e_j)\right)_{i,j} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

□

נשים לב שאם נחליף את e_i ב- $e_i' = \alpha e_i$, $0 \neq \alpha \in F$, אז נקבל את a_i
ב- $\alpha^2 a_i$ כלומר אפשר להחליף את a_i בכל איבר של $(F^{\times})^2$.

בפרט, נניח שאם F סגור אלגברית, למשל $F=\mathbb{C}$ אז

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

מעל $\mathbb{R}$ אפשר להגיע תמיד ל- $a_i = 0, 1, -1$.

נסמן $\sigma = \underbrace{\#\{i \mid a_i = 1\}}_{p} - \underbrace{\#\{i \mid a_i = -1\}}_{q}$ הסיגנטורה של B.

$r = \#\{i \mid a_i \neq 0\} = p+q$ הדרגה של B.

מסקנה: כל תבנית סימטרית מעל $\mathbb{R}$ איזומורפית לתבנית $(p,q) \Leftrightarrow (\sigma, r)$

כאשר המטריצה המייצגת אפשר למטריצה

$$\begin{bmatrix} \underbrace{1 \cdots 1}_{p} & & \\ & \underbrace{-1 \cdots -1}_{q} & \\ & & \underbrace{0 \cdots 0}_{n-p-q} \end{bmatrix}.$$

(= משפט ההתמדה של סילבסטר).

מיון מרחבים עם תבנית אנטי-סימטרית

טענה: אם B אנטי-סימטרית, המציין של $F \neq 2$, $\dim V < \infty$, אז יש בסיס של V שבו המטריצה המייצגת של B היא מטריצת בלוקים

$$\left[\begin{array}{ccc|c} A & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & A & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]$$

כאשר $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

הוכחה: אם $B\equiv 0$ אין מה להוכיח. נניח ש- $B\not\equiv 0$.

נשים לב שלכל $v\in V$ $B(v,v)=0$ כי התבנית אנטי-סימטרית והמציין $\neq 2$.

כיוון ש- $B\not\equiv 0$ יש שני וקטורים e_1,e_2 ב- V, בהכרח בת"ל מההגדרה הקודמת, כך ש-

$$B(e_1,e_2)=-B(e_2,e_1)\neq 0$$

על ידי החלפת e_1 ב- αe_1 אפשר להניח ש- $B(e_1,e_2)=1$.

אם נצמצם את התבנית לתת-המרחב $W=\mathrm{Span}\{e_1,e_2\}$, נקבל שהמטריצה המייצגת את $B|_W$ ביחס לבסיס (e_1,e_2) היא $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$.

הגרעין של הפונקציונל $B(e_1,\cdot)$ הוא $(n-1)$-מימדי, מכיל את Fe_1 ולא את Fe_2.
הגרעין של הפונקציונל $B(e_2,\cdot)$ הוא $(n-1)$-מימדי, מכיל את Fe_2 ולא את Fe_1.

לכן חיתוכם הוא תת-מרחב ממימד $n-2$ שניצב ל- W, ואינדוקציה מסיימת כנדרש. □

מסקנה

- אם B תבנית בילינארית אנטי סימטרית לא מנוונת על V אז $\dim V=2n$.
- אם $\dim V$ זוגי מסתבר שיש תבנית בילינארית אנטי-סימטרית יחידה עד כדי איזומורפיזם. לתבנית כזו קוראים גם תבנית סימפלקטית.

חבורת האוטומורפיזמים של מרחב עם תבנית

אם $B: V\times V \to F$ תבנית בילינארית נסמן

$$O_B := \{ T: V \to V \mid B(v,u) = B(Tv,Tu)\ \forall v,u\in V\ ! \ \text{איזומורפיזם לינארי}\ T \}$$

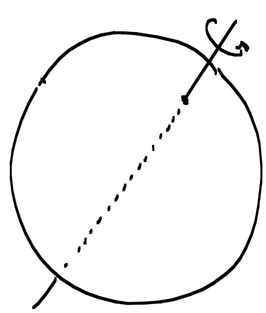
אם B סימטרית ולא מנוונת על $\mathbb{R}^n$ מסימן (p,q) נסמן גם $O(p,q)$.

המקרה $q=0$ הוא החבורה האורתוגונלית (= חבורת האיזומטריות הלינאריות של $\mathbb{R}^n$ כמרחב מכפלה פנימית), במקרה זה מסמנים פשוט $O_n = O(n,0)$.

תרגיל 6: ① הראו ש- $O_n \cong \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = I \}$

(רשות) ② הראו ש- O_n קומפקטית בטופולוגיה המושרית מ- $M_n(\mathbb{R}) \underset{\text{האוקלידית}}{\cong} \mathbb{R}^{n^2}$.

③ הראו שלכל מטריצה ב- O_3 עם דטרמיננטה $=1$ יש "ציר" סיבוב ב- $\mathbb{R}^3$, כלומר לכל $A\in O_3$ יש $0\neq v\in\mathbb{R}^3$ כך ש- $Av=v$.
ועל $(\mathbb{R}v)^\perp$, A פועלת כאופרטור סיבוב.



יהי B תבנית סימפלקטית על $\mathbb{R}^{2n}$ סטנדרטית גם

$$Sp_{2n} := O_B$$

תרגיל 7: (1) הוכיחו ש-

$$Sp_{2n} \cong \left\{ A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t J A = J \right\}$$

כלומר $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$.

(2) הוכיחו ש- $Sp_2 \simeq SL_2(\mathbb{R}) := \left\{ A \in GL_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \det A = 1 \right\}$.