מכפלות טנזוריות

חימום 1: התכונה האוניברסלית של האבליניזציה של חבורה

תהא G חבורה. חבורת הקומוטטור של G היא החבורה הנוצרת על ידי קומוטטורים, כלומר:

$$\text{חבורת הקומוטטור} \quad [G,G] := \langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x,y \in G \rangle$$

ל- $G_{ab} := G/[G,G]$, חבורת המנה, יש את התכונה האוניברסלית הבאה:

לכל חבורה אבלית A ולכל הומו׳ $\varphi : G \to A$, קיים הומו׳ $\bar{\varphi} : G_{ab} \to A$ יחיד כך שהדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd} & G_{ab} \arrow[dr, dashed, "\exists!\bar{\varphi}"] & \\ G \arrow[ur, "\pi"] \arrow[rr, "\varphi"] & & A \end{tikzcd}$$

כלומר $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$

כאשר $\pi : G \to G_{ab}$ העתקת המנה.

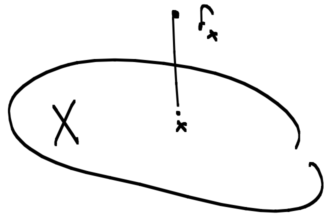
חימום 2: מרחב וקטורי מעל קבוצה (שם זמני)

תהא X קבוצה, k שדה. נסמן $F = k_{fin}(X) = \{ f : X \to k \mid \text{ל-}f \text{ תומך סופי} \}$

זהו מרחב וקטורי עם

חיבור נקודתי $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

כפל בסקלר $(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$



נסמן ב- $\delta_x(y) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$

ברור ש- $\{\delta_x \mid x \in X\}$ בסיס של $F = K_{fin}(X)$.

ל- F התכונה האוניברסלית הבאה. לכל מרחב וקטורי V ולכל העתקה של קבוצות $\varphi : X \longrightarrow V$ יש העתקה לינארית יחידה $T_\varphi : F \longrightarrow V$ כך ש- $T_\varphi \circ \delta = \varphi$

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, dashed, "\exists! T_\varphi"] & \\ X \arrow[ur, "\delta"] \arrow[rr, "\varphi"] & & V \end{tikzcd}$$

$$T_\varphi(\delta_x) := \varphi(x)$$

T_φ מוגדרת היטב ויחידה כי כל העתקה לינארית נקבעת ביחידות לפי ערכיה על בסיס.

תרגיל קל: נסמן ב- R את תת-המרחב של F הנוצר על ידי $\{\delta_x - \delta_y \mid x \neq y\}$:

$$R := Sp_K\{\delta_x - \delta_y \mid x \neq y\}$$

הראו ש- $\dim F/R = 1$.

נשים לב שאם X סופית אז $\dim K_{fin}(X) = |X|$

אבל אם עוצמת X גדולה גם עוצמת הבסיס של $K_{fin}(X)$ גדולה.

מכפלה טנסורית

יהי K שדה, V ו- W מרחבים וקטוריים מעל K.

מכפלה טנסורית של V ו- W היא מרחב וקטורי שמסומן $V \otimes W$ והעתקה בילינארית

$$\varphi : V \times W \longrightarrow V \otimes W$$

המקיימת את התכונה האוניברסלית הבאה. לכל מרחב וקטורי U ולכל העתקה בילינארית $B : V \times W \to U$ קיימת העתקה לינארית יחידה $\eta : V \otimes W \to U$ כך ש- $B = \eta \circ \varphi$. כלומר הדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd} & V \otimes W \arrow[dr, dashed, "\exists! \eta"] & \\ V \times W \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "B"] & & U \end{tikzcd}$$

טענה: מכפלה טנסורית (עוד לא הראינו שהיא קיימת!) היא יחידה עד כדי איזומורפיזם יחיד. במפורש, בהינתן $\varphi_1 : V \times W \to T_1$ ו- $\varphi_2 : V \times W \to T_2$ מכפלות טנסוריות יש איזומורפיזם יחיד $f : T_1 \xrightarrow{\sim} T_2$ של מרחבים וקטוריים כך ש- $\varphi_2 = f \circ \varphi_1$.

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} & T_1 \arrow[d, "f"] \\ V \times W \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[r, "\varphi_2"'] & T_2 \end{tikzcd}$$

הוכחה: תחילה נניח ש- $T_1=T_2$, $\varphi_1=\varphi_2$ ונראה שהאיזומורפיזם היחיד המוגדר כך ש-(*) קומוטטיבית הוא הזהות.

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ V\times W \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\varphi"'] & T \end{tikzcd}$$

מהגדרת המכפלה הטנזורית יש f יחידה כך שהדיאגרמה קומוטטיבית. מכיוון שהזהות על T מקיימת זאת, היא היחידה שמקיימת תכונה זו.

עכשיו, נפעיל את ההגדרה על T_1 ו- T_2:

$$\begin{tikzcd} & T_2 \arrow[d, dashed, "\exists! f"] \\ V\times W \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[r, "\varphi_1"'] & T_1 \end{tikzcd} \qquad f\circ\varphi_2=\varphi_1$$

$$\begin{tikzcd} & T_1 \arrow[d, dashed, "\exists! g"] \\ V\times W \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[r, "\varphi_2"'] & T_2 \end{tikzcd} \qquad g\circ\varphi_1=\varphi_2$$

$\Leftarrow$ $(g\circ f)\circ\varphi_2=\varphi_2$ ולכן $g\circ f=id_{T_2}$ (לפי מה שהוכחנו קודם)

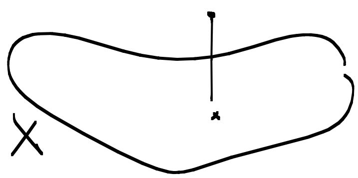
$(f\circ g)\circ\varphi_1=\varphi_1$ ולכן $f\circ g=id_{T_1}$

מכאן f (וגם g) האיזומורפיזם היחיד כך ש- $f\circ\varphi_2=\varphi_1$ $(g\circ\varphi_1=\varphi_2)$ $\square$

טענה: המכפלה הטנזורית קיימת.

הוכחה: לקבוצה X נסמן

$$F = k_{fin}(X) = \{f : X \longrightarrow k\} = \mathrm{Span}_k\{\delta_x \mid x \in X\}$$



$$\delta_x(y) = \mathbb{1}_{\{x\}}(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$$

נביט במקרה $X = V \times W$ ונסמן $F := k_{fin}(V \times W)$.

יהי $R \subset F$ תת-המרחב הנפרש ע"י הוקטורים

$$\delta_{(v,w_1+w_2)} - \delta_{(v,w_1)} - \delta_{(v,w_2)}$$

$$\delta_{(v_1+v_2,w)} - \delta_{(v_1,w)} - \delta_{(v_2,w)} \qquad \alpha \in k$$

$$\delta_{(v,\alpha w)} - \alpha\cdot\delta_{(v,w)} \qquad v, v_1, v_2 \in V$$

$$\delta_{(\alpha v,w)} - \alpha\cdot\delta_{(v,w)} \qquad w, w_1, w_2 \in W$$

נסמן $q : F \to F/R$ העתקת המנה.

תהי φ ההרכבה

$$\begin{array}{ccccc} \varphi : V\times W & \xrightarrow{\delta} & F & \xrightarrow{q} & F/R \\ (v,w) & \longmapsto & \delta_{(v,w)} & \longmapsto & q(\delta_{(v,w)}) \end{array}$$

נראה ש- $\varphi : V\times W \to F/R$ מכפלה טנזורית. (קל לבדוק ש-φ ב"ל)

תהא $B : V\times W \to U$ העתקה בילינארית.

$$\begin{tikzcd} \delta_{(v,w)} \in F = K(V\times W) \arrow[dr, dashed, "\psi_B"] & \\ V\times W \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "B"] & U \end{tikzcd} \qquad (v,w) \mapsto \delta_{(v,w)} \qquad \psi_B\circ\delta = B$$

ההעתקה הלינארית ψ_B תמיד קיימת ויחידה כפי שראינו בתרגול.

יש להראות ש-R בגרעין, ואז ψ_B תתפרק דרך F/R.

נראה, למשל שהיוצר $\delta_{(v,w_1+w_2)} - \delta_{(v,w_1)} - \delta_{(v,w_2)}$ בגרעין של ψ_B.

$$\psi_B\left(\delta_{(v,w_1+w_2)} - \delta_{(v,w_1)} - \delta_{(v,w_2)}\right) \underset{\uparrow \text{ כי } \psi_B\circ\delta=B}{=} B(v,w_1+w_2) - B(v,w_1) - B(v,w_2) \underset{\uparrow \text{ כי } B \text{ בילינארית}}{=} 0$$

באופן דומה גם היוצרים האחרים בגרעין. לכן ψ_B מתפרקת דרך המנה

$$\begin{tikzcd} & F/R \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"] \\ \psi_B : F \arrow[ur, "q"] \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

$\square$

הסימונים שנשתמש בהם:

$$\begin{array}{ccc} \delta_{(v,w)}+R & \in & F/R \\ \| & & \| \\ v\otimes w & \in & V\otimes W \end{array}$$

תרגיל 16:

① הראו ש- $\alpha\cdot v\otimes w=(\alpha v)\otimes w=v\otimes(\alpha w)$ $\quad\forall\alpha\in K, v\in V, w\in W$

② הראו שהאיברים $\{v\otimes w \mid v\in V, w\in W\}$ יוצרים את $V\otimes W$, כלומר כל $t\in V\otimes W$ הוא מהצורה $t=v_1\otimes w_1+\dots+v_n\otimes w_n$ כך ש- $v_i\in V$, $w_i\in W$ כלשהם.

③ הראו שאם $\{v_\alpha \mid \alpha\in A\}$ בסיס ל- V ו- $\{w_\beta \mid \beta\in B\}$ בסיס ל- W (A ו- B קבוצות אינסופיות כלשהן) אז $\{v_\alpha\otimes w_\beta \mid \alpha\in A,\beta\in B\}$ בסיס ל- $V\otimes W$. בפרט, אם V ו- W ממימד סופי אז $\dim(V\otimes W)=\dim V\cdot\dim W$.

תרגיל 17: יהיו V_1,V_2,W_1,W_2 מרחבים וקטוריים ו- $T_i:V_i\to W_i$ העתקות לינאריות. הראו שקיימת העתקה לינארית יחידה שמסומנת $T_1\otimes T_2:V_1\otimes V_2\to W_1\otimes W_2$ שערכיה על מונומים נתונים ע"י $(T_1\otimes T_2)(v_1\otimes v_2)=T_1(v_1)\otimes T_2(v_2)$

תרגיל 18: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. הראו שיש איזומורפיזם קנוני (כלומר, שלא תלוי בבחירת בסיס) $V\xrightarrow{\sim}V^{**}$ כאשר V^{**} הדואלי הכפול של V: מרחב הפונקציונלים על מרחב הפונקציונלים.

תרגיל 19: יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים. הראו שיש איזומורפיזם קנוני

$$(V\otimes W)\otimes U\xrightarrow{\sim}V\otimes(W\otimes U).$$