הרצאה 7

האלגברה החיצונית

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, $T(V)$ האלגברה הטנזורית.

יהי $I := \langle v \otimes v \mid v \in V \rangle$

(האידיאל הדו-צדדי הנוצר ע"י $v \otimes v$ $v \in V$).

נשים לב ש- $(v+w)\otimes(v+w) = v\otimes v + v\otimes w + w\otimes v + w\otimes w$

ולכן $v\otimes w + w\otimes v \in I$ $\forall v,w \in V$.

הגדרה: האלגברה החיצונית של V (Exterior algebra) היא המנה

$$\Lambda(V) := T(V)/I$$

כיוון ש- I הומוגני זו אלגברה מדורגת: $\Lambda^n(V) := (\Lambda(V))_n \cong V^{\otimes n}/I\cap V^{\otimes n}$

נסמן את תמונת $v_1\otimes\cdots\otimes v_n$ במנה ע"י $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n$.

$$\Lambda(V) = F \oplus V \oplus \Lambda^2(V) \oplus \Lambda^3(V) \oplus \cdots$$

טענה: ① אם $v,u \in V$ אז $v\wedge u = -u\wedge v$

② אם $u_1,\dots,u_n \in V$, $n\geq 2$, ו- $u_i=u_j$ לאיזשהו זוג $i\neq j$ אז

$$u_1\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_n = 0$$

הוכחה: ① נובע מכך ש- $v\otimes u + u\otimes v \in I$.

② נניח ש- $i<j$, $u=u_i=u_j$. אז ע"י סדרת החלפות שמשנות רק את הסימן נקבל

$$\dots\wedge \underbrace{u\wedge u}_{\in I}\wedge\dots = 0 \quad \square$$

הגדרה: העתקה מולטי-לינארית $\varphi: V\times V\times\dots\times V \longrightarrow U$ נקראת אנטי-סימטרית (alternating) אם $\varphi(v_1,\dots,v_n)=0$ כאשר איזשהו זוג $v_i=v_j$, $i\neq j$.

המרחב $\Lambda^n(V)$ של האלגברה החיצונית פותר את הבעיה האוניברסלית הבאה:

לכל העתקה אנטי-סימטרית $\varphi: \underbrace{V\times\dots\times V}_{n \text{ פעמים}} \longrightarrow U$ יש העתקה לינארית יחידה $\eta_\varphi: \Lambda^n(V)\to U$ כך ש-

$$\begin{tikzcd} & \Lambda^n(V) \arrow[dr, dashed, "\eta_\varphi"] & \\ V\times\dots\times V \arrow[ur, "\text{ההעתקה הקנונית}"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & & U \end{tikzcd}$$

הוכחה: מהתכונה האוניברסלית של המכפלה הטנזורית ביחס להעתקות מולטי-לינאריות יש העתקה φ' יחידה כך שהדיאגרמה הבאה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd}
 & V^{\otimes n} \arrow[dr, dashed, "\exists! \varphi'"] & \\
V\times\cdots\times V \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\circlearrowright"] & & U
\end{tikzcd}$$

כיוון ש- φ אנטי-סימטרית $I\cap V^{\otimes n}\subset \ker\varphi'$ ולכן φ' מתפרקת דרך המנה $\Lambda^n(V)\simeq V^{\otimes n}/I\cap V^{\otimes n}$ לפי תרגיל קודם.

$$\begin{tikzcd}
 & & \Lambda^n(V) \arrow[ddr, dashed, "\exists! \varphi''"] & \\
 & V^{\otimes n} \arrow[ur] \arrow[dr, dashed, "\exists! \varphi'"] & & \\
V\times\cdots\times V \arrow[uurr, bend left] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\circlearrowright"] & & U &
\end{tikzcd}$$

$\square$

תרגיל 29: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, $x\in\Lambda^p(V)$, $y\in\Lambda^q(V)$.

הראו ש: $x\wedge y=(-1)^{pq}\,y\wedge x$.

בסיס ומימד ל- $\Lambda^p(V)$

טענה: יהי V ממימד n עם בסיס $e_1,\dots,e_n$. אזי

$$\{ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} \mid 1\le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n\}$$

בסיס של $\Lambda^p(V)$.

בפרט: $\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}$ ו- $\Lambda^p(V)=(0)$ אם $p>n$.

הוכחה:

<u>פרישה</u> כיוון ש- $\{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_p} \mid 1\le i_1,\dots,i_p\le n\}$ פורשים את $V^{\otimes p}$

ו- $\Lambda^p(V)$ מנה שלו, אזי $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\}$ פורשים את $\Lambda^p(V)$.

וכיוון שעד כדי סימן מקבלים את אותו הוקטור אם מחליפים e_{i_j} ב- e_{i_k}

אפשר להניח ש- $1\le i_1 < i_2 < \cdots < i_p \le n$.

<u>בת"ל</u> תחילה נראה ש- $0 \ne e_1\wedge e_2\wedge\cdots\wedge e_n \in \Lambda^n(V)$.

יהי $\{f_1,\dots,f_n\}\subseteq V^*$ הבסיס הדואלי ל- $\{e_1,\dots,e_n\}$, כלומר $f_i(e_j)=\delta_{ij}$.

נבנה בהעתקה האנטי-סימטרית

$$\begin{tikzcd}
 & \Lambda^n(V) \arrow[dr, dashed] & \\
V\times V\times\cdots\times V \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] & & F
\end{tikzcd}$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \longmapsto \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, f_1(u_{\sigma(1)}) f_2(u_{\sigma(2)})\cdots f_n(u_{\sigma(n)})$$

היא מתפרקת דרך $\Lambda^n(V)$ ולכן יש העתקה לינארית $\eta:\Lambda^n(V)\to F$

כך שהדיאגרמה קומוטטיבית. אבל העתקה f היא לא 0, כי

$$f(e_1,\dots,e_n)=1$$

ולכן גם η לא 0, כלומר $\Lambda^n(V)=\mathrm{Span}_F\{e_1\wedge\cdots\wedge e_n\}\neq(0)$.

למעשה, נובע מכך שאם $\omega_1,\dots,\omega_k$ בת"ל אז $0\neq\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k\in\Lambda^k(V)$,

כי אפשר להשלים אותם לבסיס של V וכיוון ש-

$$\underbrace{(\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_k)}_{\neq 0}\wedge\underbrace{(\omega_{k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_n)}_{\neq 0}=\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n\neq 0.$$

נוכיח את הטענה בכיוון ההפוך על k. עבור $k=n$ הוכחנו.

יהי $0<k<n$.

נניח בשלילה ש- $$0=\sum_{\substack{\alpha:\{1,\dots,k\}\to\{1,\dots,n\}\\ \text{מונוטונית עולה}}} a_\alpha e_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge e_{\alpha_k}$$ עבור סקלרים $0\neq a_\alpha\in F$.

יש אינדקס j עבורו e_j מופיע רק בחלק מהמחוברים. נכפול את

הביטוי ב-e_j: $0=e_j\wedge 0=e_j\wedge\sum_\alpha\cdots$. המחוברים שבהם לא הופיע e_j

לא יתבטלו, ונשאר עם צירוף לינארי לא טריוויאלי ב-$\Lambda^{k+1}(V)$ $\lightning$. $\square$

שימושים

(1) מקבלים הגדרה קנונית לדטרמיננט, קיום ויחידות:

$$\underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{n \text{ עותקים}} \longrightarrow \Lambda^n(V)$$

(2) נניח ש- $f: \mathcal{U}\to V$, $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$, $V\subseteq\mathbb{R}^m$ פונקציה, $\mathcal{U}$ ו- V פתוחות.

נרשום $f(x_1,\dots,x_n)=\left(f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)\right)$.

אם $x\in\mathcal{U}$ יש הערכה ליניארית

$df_x:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ הדיפרנציאל של f ב- x.

$$df_x\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1 & \cdots & \partial_n f_1\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_1 f_m & & \partial_m f_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$$

כאשר $\partial_j f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x$

ומתקיים $\|f(y)-df_x(y-x)\| < \varepsilon\cdot\|y-x\|^2$ כלומר df_x קירוב "טוב" של f ליד y.

נניח עכשיו ש- $m=1$. מקבלים פונקציונלים $dx_1,\dots,dx_n$ המתאימים לפונק' הקואורדינטות $(x_1,\dots,x_n)\longmapsto x_i$

ומתקיים לכל $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$,

$$df\big|_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x dx_i$$

(סמן

$$T_x(U) = Der\left(C^\infty(U), \mathbb{R}\right)$$

$$:= \{ \underbrace{D : C^\infty(U) \to \mathbb{R}}_{\text{לינארית}} , \ D(fg) = f(x)D(f) + g(x)D(g) \}$$

אז $\partial_1, \dots, \partial_n \in T(U)$ ומתקיים $T_x(U) = Span_{\mathbb{R}}\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$

אם נגדיר $df = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x dx_i$ אזי בפרט כן:

$$df(\partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x \in \mathbb{R}$$

ונראה ש- df הוא פונקציונל על $T_x(U)$.

$$df\left(\sum \alpha_i \partial_i\right) = \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_x = \sum_i \alpha_i \, df(\partial_i)$$

ויתר על כן $dx_1, \dots, dx_n$ בסיס דואלי ל- $\partial_1, \dots, \partial_n$ כי

$$dx_i(\partial_j) = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}\Big|_x = \delta_{ij}$$

לא קשה להכליל שלא נקודתית על

$$T(U) := \{ D : C^\infty(U) \to C^\infty(U), \ D(fg) = fDg + gDf \}$$

אז

$$T(U) = Span_{C^\infty(U)}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

$$\cong \left(C^\infty(U)\right)^n$$

מודול חופשי

ונסמן
$$T(U)^* = \mathrm{Hom}_{C^\infty(U)}\left(T(U), C^\infty(U)\right)$$

המודול הנוצר ע"י.
$$= \mathrm{Span}_{C^\infty(U)}\{dx_1, \dots, dx_n\}$$

וכו'
$$\Omega^k(U) := \Lambda^k\left(T(U)^*\right). \qquad \left(\Omega^0(U) := C^\infty(U)\right)$$

ונגדיר הנגזרת
$$d : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$$
$$f\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \mapsto df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

תרגיל: הוכח ש- $d \circ d = 0$.

ניקח את $U = \mathbb{R}^3$.
$$\Omega^0(U) \to \Omega^1(U)$$
$$f \longmapsto df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3$$

$$\Omega^1(U) \to \Omega^2(U)$$
$$f\,dx + g\,dy + h\,dz \longmapsto df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$$
$$= (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy + g_z dz) \wedge dy + \cdots$$
$$= (g_x - f_y)\, dx \wedge dy + (f_z - h_x)\, dz \wedge dx + (h_y - g_z)\, dy \wedge dz$$

$$\left(\vec{F} = (f, g, h), \quad \mathrm{curl}(f, g, h) = (g_x - f_y,\ h_x - f_z,\ h_y - g_z) \right)$$

$$\Omega^2(U) \longrightarrow \Omega^3(U)$$

$$f\, dy\wedge dz + g\, dz\wedge dx + h\, dx\wedge dy \longmapsto (f_x + g_y + h_z)\, dx\wedge dy\wedge dz$$

$$\left(\operatorname{div}(f,g,h) = f_x + g_y + h_z \right)$$

לכן הקשרים $0 = \operatorname{div}\operatorname{curl} F$, $0 = \operatorname{curl}\operatorname{grad} F$ נובעים מ- $d^2=0$.

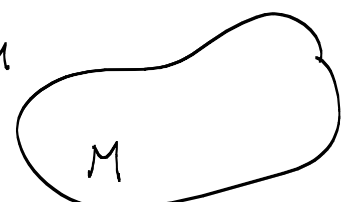
(העשרה)

משפט סטוקס:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

$$\omega \in \Omega^{n-1}(M)$$

∂M השפה



יריעה

③ שימוש אחרון: פרמיונים .