קטגוריות

כשבוחנים תחומים רבים במתמטיקה אפשר למצוא מצטיירת תמונה די אחידה מבחינה מבנית. למשל, באלגברה לינארית המבנה הוא

- **עצמים:** מרחבים וקטוריים $V, W, \ldots$
- **העתקות שומרות מבנה:** העתקות לינאריות $V \xrightarrow{f} W \in Hom(V,W)$
- פעולת הרכבה של העתקות: $V \xrightarrow{f} W$, $W \xrightarrow{g} U$ $\rightsquigarrow$ $V \xrightarrow{gf} U$

כך שמתקיים

1. ההרכבה אסוציאטיבית (כאשר היא מוגדרת)
2. הקבוצות $Hom(V,W)$, $Hom(V',W')$ זרות, אלא אם כן $V=V'$, $W=W'$.
3. בכל $Hom(V,V)$ יש איבר מיוחד id_V המקיים

$$\forall f \in Hom(W,V) \quad id_V \circ f = f$$
$$\forall g \in Hom(V,W) \quad g \circ id_V = g$$

באופן דומה: חבורות, חוגים, מרחבים טופולוגיים וכו'.

תורת הקטגוריות נותנת שפה אחידה לתאר את כל אלה (ועוד רבים אחרים).

בנוסף, היא מאפשרת קישורים בין התחומים השונים (באמצעות פונקטורים).

הגדרה: קטגוריה C מורכבת מהנתונים הבאים

- מחלקה של **עצמים** שמסומנת $Ob(C)$.
- לכל $A,B \in Ob(C)$ קבוצה $Hom(A,B)$ שאיבריה נקראים **מורפיזמים**.
- **פעולת הרכבה**, לכל $A,B,C \in Ob(C)$

$$Hom(A,B) \times Hom(B,C) \longrightarrow Hom(A,C)$$
$$(f\ ,\ g) \longmapsto gf$$

כך שמתקיים

1. ההרכבה אסוציאטיבית כאשר היא מוגדרת.
2. קבוצות המורפיזמים הן זרות.
3. בכל $Hom(A,A)$ יש איבר 1_A המקיים $1_A \cdot f = f$, $g \cdot 1_A = g$ (עבור f,g מתאימים).

הערה: את המורפיזמים נסמן גם כך $A \xrightarrow{f} B \in Hom(A,B)$.
את אוסף כל המורפיזמים נסמן $Mor(C)$.

דוגמאות:

1. הקטגוריה Sets (קבוצות). עצמים = קבוצות, מורפיזמים = פונקציות.
2. הקטגוריה Groups (חבורות). עצמים = חבורות, מורפיזמים = הומו' של חבורות.
3. הקטגוריה Top (מרחבים טופולוגיים). עצמים = מרחבים טופולוגיים, מורפיזמים = העתקות רציפות.

4. תהא G חבורה.

נתאים לה קטגוריה - יש בה <u>עצם</u> אחד $*$.

<u>המורפיזמים</u> $Hom(*,*) := G$.

<u>הרכבה</u> כפל בחבורה.

5. תהא X קבוצה סדורה חלקית.

נתאים לה קטגוריה - <u>העצמים</u> הם איברי X.

<u>מורפיזמים</u>
$$Hom(x,y) := \begin{cases} \phi & x \nleq y \\ a^x_y & x \leq y \end{cases}$$

(כלומר, מורפיזם יחיד כאשר $x \leq y$)

<u>הרכבה</u> $a^x_y \cdot a^y_z := a^x_z \qquad x \leq y \leq z$

הגדרה: תהא $\mathcal{C}$ קטגוריה. מורפיזם $f \in Hom(A,B)$ נקרא איזומורפיזם אם קיים $g \in Hom(B,A)$ כך ש- $f \circ g = 1_B$, $g \circ f = 1_A$.

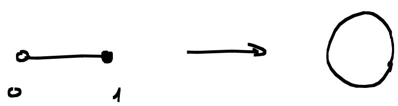
נשים לב שבהגדרה שונה מההגדרה שפגשנו בד"כ (למשל, איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים הוגדר כהעתקה לינארית חח"ע ועל והראינו טענה שמתקיימת ההגדרה למעלה).

סיבה אחת לכך היא שמורפיזמים אינם בהכרח פונקציות.

אבל סיבה עמוקה יותר היא שההגדרה כהעתקה שומרת מבנה + חח״ע ועל במקרה שבו המורפיזמים הם כן פונקציות היא לעיתים חלשה מדי.

למשל, בקטגוריה של מרחבים טופולוגיים ההעתקה

$$\varphi : (0,1] \longrightarrow S^1$$



$$x \longmapsto e^{2\pi i x}$$

כאשר הטופולוגיה על $(0,1]$ היא זו המושרית מהנורמה ב-$\mathbb{R}$ והטופולוגיה על S^1 היא זו המושרית מ-$\mathbb{R}^2$, היא רציפה, חח״ע ועל אבל אינה הומיאומורפיזם.