תאריך הבחינה: 01.07.2012
שם המרצה: אורי און
שם הקורס: מבנים אלגבריים 2
מספר הקורס: 201.1.7071
שנה: תשע"ב
סמסטר: ב'
מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

בחינה במבנים אלגבריים 2

המרצה: אורי און

בבחינה 5 שאלות עם ניקוד כולל של 108 נקודות.
נא נמקו היטב את טענותיכם וכתבו בכתב יד ברור. בהצלחה!

שאלה 1 (18 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי ממימד $2n$ מעל שדה F. תהא $B: V \times V \to F$ תבנית בילינארית אנטי-סימטרית ולא מנוונת. הוכיחו שאם W תת-מרחב המקיים $B(W, W) = \{0\}$ אז $\dim(W) \leq n$.

הוכיחו שקיים תת-מרחב כזה שמימדו בדיוק n.

שאלה 2 (18 נקודות)

יהי $U: Ab \to Groups$ הפנקטור השוכח מהקטגוריה של חבורות אבליות לקטגוריה של חבורות.

יהי $F: Groups \to Ab$ הפנקטור המתאים לכל חבורה את האבליניזציה שלה $F(G) = G/[G, G]$ ולכל הומומורפיזם את ההומומורפיזם המושרה על המנות.

(א) הוכיחו ש- F הוא פנקטור.

(ב) הוכיחו ש- F צמוד שמאלי של U.

שאלה 3 (18 נקודות)

(א) תהיינה $T_i: V_i \to W_i$ העתקות לינאריות בין מרחבים וקטורים $(i = 1,2)$. הוכיחו שקיימת העתקה לינארית יחידה $S: V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2$ המקיימת $S(v_1 \otimes v_2) = T_1(v_1) \otimes T_2(v_2)$, לכל $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$.

(ב) הוכיחו שלכל אופרטור אורתוגונלי $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (כלומר, אופרטור ששומר על המכפלה הפנימית הסטנדרטית) עם דטרמיננט 1 יש ציר סיבוב, כלומר וקטור $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ כך ש- $T(v) = v$ ו- $T_{|\mathbb{R}v^{\perp}}$ אופרטור סיבוב.

שאלה 4 (18 נקודות)

יהי F שדה. נסמן ב- $F[x]$ את חוג הפולינומים, ב- $R_n = F[x]/(x^n)$ את המנה הסופית באידיאל (x^n) לכל $n \in \mathbb{N}$ וב- $\varphi_m^n : R_n \to R_m$ את העתקות המנה הטבעיות עבור $n \geq m$.
הוכיחו שחוג טורי החזקות הפורמליים

$$F\llbracket x \rrbracket := \{\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ : a_n \in F\}$$

עם ההעתקות הקנוניות $p_n : F\llbracket x \rrbracket \to F\llbracket x \rrbracket/(x^n) \simeq R_n$, הוא הגבול ההפוך של המערכת ההפוכה $\left\{R_n, \varphi_m^n\right\}$.

שאלה 5 (36 נקודות)

יהי $\mathbb{F}_q$ השדה הסופי עם q איברים ותהא G תת-החבורה של $GL_2(\mathbb{F}_q)$ המוגדרת על ידי

$$G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{F}_q^{\times}, b \in \mathbb{F}_q\right\}.$$

G פועלת על $\mathrm{X} = \mathbb{F}_q$ על ידי: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = ax + b \ \ x \longmapsto$.

(א) חשבו את הקרקטר של הצגת הפרמוטציה של G המתקבלת על $\mathbb{C}(X)$.

(ב) הוכיחו שההצגה הטריויאלית של G מוכלת ב- $\mathbb{C}(X)$.

(ג) הוכיחו ש $\mathbb{C}(X) = \mathbb{C} \oplus W$ (כאשר $\mathbb{C}$ מציין את ההצגה הטריויאלית) ו- W אי-פריקה.

(ד) מהם המימדים של ההצגות האי-פריקות של G וכמה הצגות אי-פריקות יש מכל מימד? נמקו.