אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

תאריך הבחינה:	03.08.2012
שם המרצה:	אורי און
שם הקורס:	מבנים אלגבריים 2
מספר הקורס:	201.1.7071
שנה:	תשע"ב
סמסטר:	ב'
מועד:	ב'
משך הבחינה:	3 שעות
חומר עזר:	מודוס פוננס

בחינה במבנים אלגבריים 2

המרצה: אורי און

בבחינה 6 שאלות עם ניקוד כולל של 120 נקודות.
אנא נמקו היטב את טענותיכם וכתבו בכתב יד ברור ומסודר. בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $M_n(F)$ מרחב המטריצות מגודל $n \times n$ מעל שדה F. תהא $B: M_n(F) \times M_n(F) \to F$ התבנית המוגדרת על ידי $B(x,y) = trace(xy)$.

(א) הוכיחו ש- B בילינארית, סימטרית ולא מנוונת.

(ב) חשבו את הדיסקרימיננט של B.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי F שדה. נסמן ב- $F[x]$ את חוג הפולינומים מעל F. יהיו $f(x), g(x) \in F[x]$ פולינומים זרים. הוכיחו ש-

$$F[x]/(f(x)) \otimes_{F[x]} F[x]/(g(x)) = (0).$$

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. יהי J האידיאל של האלגברה הטנזורית $T(V)$ הנוצר על ידי $\{u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in V\}$. לכל $k \in \mathbb{N}$ נסמן $S^k(V) = V^{\otimes k}/J \cap V^{\otimes k}$. הוכיחו ש- $S^k(V)$ עם ההעתקה הקנונית $\eta: \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ פעמים}} \to S^k(V)$ מקיים את התכונה האוניברסאלית הבאה:

לכל העתקה מולטי-ליניארית סימטרית $\varphi: V \times \cdots \times V \to W$ יש העתקה ליניארית יחידה $\psi: S^k(V) \to W$ כך ש- $\psi \circ \eta = \varphi$.

שאלה 4 (20 נקודות)

לכל $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $m \leq$ יהיו $A_n = \mathbb{Z}$ (כמודולים מעל $\mathbb{Z}$) ו- φ_n^m ההעתקות של $\mathbb{Z}$-מודולים

$$\varphi_n^m : A_m \to A_n$$
$$a \mapsto 2^{n-m}a$$

(א) הראו ש- $\{A_n, \varphi_n^m\}$ מערכת ישרה של $\mathbb{Z}$-מודולים.

(ב) נסמן ב- $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{\frac{a}{2^b} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ את המספרים הרציונאליים עם מכנה שהוא חזקה של 2,
ולכל $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ נסמן ב- $\lambda_n : A_n \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ את ההעתקות $\lambda_n(a) = \frac{a}{2^n}$.
הוכיחו ש- $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ עם ההעתקות $\{\lambda_n\}$ הוא הגבול הישר של המערכת הישרה.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהא S_3 חבורת התמורות על 3 אותיות.

(א) ממשו באופן מפורש את ההצגות האי-פריקות הלא שקולות שלה וחשבו את טבלת הקרקטרים.

(ב) תהא U ההצגה האי-פריקה של S_3 ממימד 2. מצאו את הפירוק להצגות אי-פריקות של ההצגה

$$V := \underbrace{U \otimes U \otimes \cdots \otimes U}_{m \text{ פעמים}}$$

שאלה 6 (20 נקודות)

תהא G חבורה סופית ויהיו $g_1, g_2 \in G$ איברים שאינם צמודים. הוכיחו שקיים קרקטר χ של הצגה אי-פריקה עבורו $\chi(g_1) \neq \chi(g_2)$.