מושגים בסיסיים בטופולוגיה וגיאומטריה

דף תרגילים מס' 4

① תהא A אלגברה קומוטטיבית מעל שדה F. נסמן

$$Der_F(A) = \{ X \in Hom_k(A,A) \mid X(ab) = aX(b) + bX(a) \ \ \forall a,b \in A \}$$

הראו ש- $Der_F(A)$ היא אלגברת לי, כלומר

(a) $\forall X,Y \in Der_F(A)$, $[X,Y] := XY - YX \in Der_F(A)$

(b) $\forall X,Y,Z \in Der_F(A)$, $[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0$

②* תהא M יריעה חלקה, ותהיינה $K \subset U \subset M$ תתי-קבוצות כך ש- U פתוחה ו- K קומפקטית. הראו שקיימת פונקציה חלקה $\varphi: M \to [0,1]$ כך ש $f|_K \equiv 1$ ו- $f|_{M \setminus U} \equiv 0$.

③** הוכיחו שלכל שדה וקטורי על הספירה S^2 יש נקודה בה הוא מתאפס.

④** הגדרות: (א) כיסוי פתוח של מרחב טופולוגי X נקרא סופי מקומית אם לכל $p \in X$ יש סביבה הנחתכת באופן לא ריק רק מספר סופי של תתי קבוצות מהכיסוי. (ב) התומך של פונקציה $f: X \to \mathbb{R}$ הוא הסגור של אוסף הנקודות ב- X בהן f אינה מתאפסת.

(ג) פירוק יחידה: אוסף פונקציות $\varphi_\alpha: M \to [0,1]$ חלקות על יריעה M נקרא פירוק יחידה אם (i) אוסף הקבוצות $\{ \{p \in X \mid \varphi_\alpha(p) \neq 0\}_\alpha \}$ מהווה כיסוי פתוח סופי מקומית של M. (ii) לכל $p \in M$ $\sum_\alpha \varphi_\alpha(p) = 1$. (iii) אומרים שהפירוק כפוף לכיסוי נתון $\mathfrak{U}$ של M אם בנוסף לכל α קיים $U \in \mathfrak{U}$ כך ש $supp\,\varphi_\alpha \subseteq U$.

הוכיחו שלכל יריעה חלקה M ולכיסוי פתוח $\mathfrak{U}$ של M קיים פירוק יחידה הכפוף ל- $\mathfrak{U}$.