מושגים בסיסיים בטופולוגיה וגיאומטריה

תרגיל בית מס' 5

1. הוכיחו ש- $\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$ כאשר V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{R}$.

2. הראו שעל קבוצה פתוחה $U \subseteq \mathbb{R}^n$ הנגזרת החיצונית d היא ההעתקה הלינארית היחידה $d:\Omega^p(U)\to\Omega^{p+1}(U)$ המקיימת

$$\forall \omega_1,\omega_2\in\Omega^p(U), \quad d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2 \quad (i)$$

$$\forall \omega_1\in\Omega^p(U),\ \omega_2\in\Omega^q(U), \quad d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^p\omega_1\wedge d\omega_2 \quad (ii)$$

$$\forall f\in\Omega^0(U), \quad df(X)=X(f) \quad (iii)$$

$$\forall f\in\Omega^0(U), \quad d(df)=0 \quad (vi)$$

הסיקו שמכאן נובע ש- d אינו תלוי במערכת הקואורדינטות שמגדירה אותו.

3. יהי Y השדה הוקטורי הבא (המוגדר על $\mathbb{R}^{2n}$)

$$Y = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + x_{2n}\frac{\partial}{\partial x_{2n-1}} - x_{2n-1}\frac{\partial}{\partial x_{2n}}$$

הראו שהצמצום של Y לספירה S^{2n-1} נותן שדה וקטורי חלק על S^{2n-1} שאינו מתאפס באף נקודה.

4. תהא M יריעה חלקה ו- (U,φ), (W,ψ) שתי מפות כך ש- $U\cap W\neq\emptyset$.

(א) מצאו את הקשר בין (f_i) ו- (g_i) כאשר $X\in TM$,

$$X|_U=\sum_{i=1}^n f_i(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{ו-} \quad X|_W=\sum_{i=1}^n g_i(y_1,\dots,y_n)\frac{\partial}{\partial y_i}$$

(ב) מצאו את הקשר בין (f_i) ו- (g_i) כאשר $\omega\in TM^*$

$$\omega|_U=\sum_i f_i(x_1,\dots,x_n)\,dx_i \quad \text{ו-} \quad \omega|_W=\sum_i g_i(y_1,\dots,y_n)\,dy_i$$