להגשה עד 26/12

תרגיל בית מס' 2 (חלק א')

1. א. תהא $A\subset[0,1]$ קבוצה שהיא איחוד בן מניה של קטעים פתוחים (a_i,b_i) כך שכל מספר רציונלי בקטע $[0,1]$ מוכל באיזשהו (a_i,b_i). הראו ש- $\partial A=[0,1]\setminus A$.

ב. מצאו אוסף קטעים כנ"ל כך ש- $\sum_{i=1}^{\infty}(b_i-a_i)<1$.

ג. הראו שבמקרה ש-ב מתקיים ל- ∂A אין מידה אפס.

2. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה ו- $f,g:A\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות על A.

א. הראו ש- $f+g$ אינטגרבילית על A ומתקיים $\int_A f+g=\int_A f+\int_A g$.

ב. הראו ש- $f\cdot g$ אינטגרבילית על A.

בנוסף, אם $c\in\mathbb{R}$ אז $c\cdot f$ אינטגרבילית ו- $\int_A cf=c\int_A f$.

3. תהא $C\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה עם שפה ממידה 0, ותהא $f:C\to\mathbb{R}$ חסומה.
הראו שלכל תיבה A והרחבה של f לפונקציה אינטגרבילית $\tilde{f}:A\to\mathbb{R}$
הפונקציה $\tilde{f}\cdot\chi_C$ אינטגרבילית והאינטגרל $\int_A \tilde{f}\chi_C$ לא תלוי ב- A ו- $\tilde{f}$.

(כמסקנה נקבל $\int_C f$ מוגדר היטב)

4. הוכיחו שאם $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ממידה אפס אז לכל $\varepsilon>0$ קיים כיסוי של A ע"י קוביות n-ממדיות U_i כך ש- $\sum_{i=1}^{\infty}v(U_i)<\varepsilon$.

5. א. תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה ותהי $f:A\to\mathbb{R}^n$ פונקציה המקיימת את תנאי ליפשיץ (קיים k כך ש $\|f(x)-f(y)\|<k\|x-y\|$). הוכיחו שאם $N\subseteq A$ ממידה אפס אז $f(N)$ ממידה אפס.

ב. הסיקו שלכל $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ לינארית ולכל $b\in\mathbb{R}^n$ ההעתקה $f(x)=Tx+b$ מעבירה קבוצה שמידתה אפס לקבוצה שמידתה אפס.

6. תהי $f:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{אי רציונלי } y \\ 1 & \text{רציונלי ו-}x\text{ אי רציונלי } y \\ 1-1/q & \text{רציונלי } x \text{ ,זרים } p,q \text{ ,רציונלי } y=p/q \end{cases}$$

א. הוכיחו ש- f אינטגרבילית על $[0,1]^2$ וש- $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dx\,dy=1$

ב. תהי $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ הפונקציה

$$g(y)=\begin{cases}\int_0^1 f(x,y)\,dx & \text{אם האינטגרל קיים}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הוכיחו ש- $g(y)$ לא אינטגרבילית על $[0,1]$.

ג. הוכיחו שלכל $x\in[0,1]$ האינטגרל $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ קיים וש- $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy=1$.

7. חשבו את ערכי האינטגרלים הבאים

א. $\int_A xy^2\,dx\,dy$ כאשר $A=\{(x,y)\subseteq \mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le 2\}$

ב. $\int_A x\,dx\,dy$ כאשר A משולש שקודקודיו $(1,1)$, $(-1,2)$, $(3,3)$.

ג. $\int_{[0,1]^2}\cos^2(\pi(x+y))\,dx\,dy$

ד. $\int_{[0,1]^n} e^{\|x\|^2}\cdot\prod_{i=1}^{n} x_i\,dx$

8. השתמשו במשפט פוביני לחישוב האינטגרלים הנשנים הבאים

א. $\int_0^1 dy\int_y^1 \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)dx$

ב. $\int_0^{\pi/2} dy\int_y^{\pi/2}\frac{\sin x}{x+y}\,dx$

ג. $\int_0^1 dx_1\int_{x_1}^1 dx_2\cdots\int_{x_{n-1}}^1 \frac{1}{1+x_n^n}\,dx_n$