לא להגשה

תרגיל בית מס' 2 (חלק ב)

1. תהא A תיבה ב-$\mathbb{R}^n$ ו-$f:A\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

א. הוכיחו שאם $0\le f$ אז $\int_A f \ge 0$. הסיקו שאם $g:A\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ו-$f\le g$ אז $\int_A f \le \int_A g$

ב. הוכיחו ש-$|f|$ אינטגרבילית ושמתקיים $\left|\int_A f\right| \le \int_A |f|$.

2. רשמו את נוסחת טיילור מסדר $0<j\le m$ עבור הפונקציות הבאות ומצאו חסם על השגיאה בתחום.

א. $f(x)=x^m$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, בתחום $(-1,1)$, ליד $x=0$ וליד $x=a\in(-1,1)$.

ב. $f(x,y)=(x+y)^m$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, בתחום $(-1,1)^2$ ליד $(0,0)$ וליד $(a,b)\in(-1,1)$.

ג. $f(x_1,\dots,x_n)=(x_1+\dots+x_n)^m$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, בתחום $(-1,1)^n$ ליד 0 וליד $a\in(-1,1)^n$.

3. תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ מדידה ז'ורדן ויהי $\varepsilon>0$. הוכיחו שקיימת קבוצה קומפקטית $K\subseteq A$ כך ש-$A\setminus K$ מדידה ז'ורדן ומתקיים $\int_{A\setminus K} 1 < \varepsilon$.

4. תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ו-$f:K\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ואי שלילית.

הוכיחו שאם $\int_K f = 0$ אז ל-$\mathrm{supp}(f)$ יש מידה אפס.

5. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית-רימן אי-שלילית. נסמן

$$A_f := \{(x,y) \mid a\le x\le b,\ \ 0\le y\le f(x)\}$$

הוכיחו ש- A_f מדידה-ז'ורדן (ב- $\mathbb{R}^2$) ושהנפח שלה הוא $\int_a^b f$.

6. השתמשו במשפט פוביני כדי להוכיח שאם $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ מקיימת שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}$ רציפות ב- $a\in\mathcal{U}$

אז הן שוות.

7. הראו שאת כל הפתרונות למערכת

$$\begin{cases} 4x+y+z+u^2=0 \\ x-y+2z+u=0 \\ 3x-2y-z-u=0 \end{cases}$$

בסביבה מתאימה של $(0,0,0,0)$ אפשר להציג כ- $(x(z),y(z),z,u(z))$

כ- $(x(y),y,z(y),u(y))$ וכ- $(x,y(x),z(x),u(x))$, אבל לא כ- $(x(u),y(u),z(u),u)$.