אינפי 3 - תרגיל בית מס' 3 (חלק ב')

1. פיתרו את התרגילים המסומנים ברשימות ההרצאה.

2. השתמשו בקואורדינטות קוטביות כדי לחשב את ערכי האינטגרלים הבאים

(א) $\iint_{B_1(0)} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, $B_1(0)\subseteq\mathbb{R}^2$.

(ב) $\iint_{D} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\le x^2+y^2\le 3\}$.

(ג) $\iiint_{B_1(0)} (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, $B_1(0)\subseteq\mathbb{R}^3$.

3. חשבו את $\iint_D (x+y)^2\,dx\,dy$ כאשר D הוא התחום במישור $\mathbb{R}^2$ המוגבל

ע"י הישרים $x+y=2$, $x+y=4$, $x=y$ ו- $x^2-y^2=4$.

(רמז: הציבו $u=x+y$, $v=x-y$)

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{R}$. תהא $\omega\in\Lambda^n(V)$ תבנית הנפח

ע"י מכפלה פנימית $\langle\, ,\rangle$ ואוריינטציה μ , ויהיו $v_1,\dots,v_n\in V$. הוכיחו ש-

$$\left|\omega(v_1,\dots,v_n)\right| = \sqrt{\det(\langle v_i,v_j\rangle)}$$

5. עבור שדה וקטורי F על $\mathbb{R}^3$, נגדיר

$$\omega^1_F := F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$$

$$\omega^2_F := F_1\,dy\wedge dz + F_2\,dz\wedge dx + F_3\,dx\wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$$

(א) הוכיחו ש-

$$df = \omega^1_{\text{grad} f} \qquad (\text{אם } f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \text{ גזירה ברציפות})$$

$$d\omega^1_F = \omega^2_{\text{curl} F}$$

$$d\omega^2_F = \text{div} F\, dx\wedge dy\wedge dz$$

(ב) השתמשו ב-(א) כדי להוכיח ש- $0 = \text{curl}\,\text{grad} f$, $0 = \text{div}\,\text{curl} F$.

(ג) יהי F שדה וקטורי על קבוצה כוכבית A פתוחה ב-$\mathbb{R}^3$. הוכיחו ש

- אם $\text{curl} F = 0$ אז קיימת $f:A\to\mathbb{R}$ כך ש- $F = \text{grad} f$.
- אם $\text{div} F = 0$ אז קיים שדה וקטורי G כך ש- $F = \text{curl}\, G$.