דף תרגילים 3 ב'

1. עבור $R>0$ ו- $n\in\mathbb{N}$ נגדיר 1-קוביה סינגולרית $C_{R,n}:[0,1]\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ ע"י

$$C_{R,n}(t) = (R\cos 2\pi n t,\ R\sin 2\pi n t)$$

הוכיחו שקיימת 2-קוביה סינגולרית $c:[0,1]^2\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ כך ש- $\partial c = C_{R_1,n}-C_{R_2,n}$.

2. תהי $d\theta\in\Omega^1(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$, $d\theta = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$.

(א) הוכיחו ש- $\int_{C_{R,n}} d\theta = 2\pi n$.

(ב) הוכיחו שלא קיימת 2-שרשרת ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ כך ש- $C_{R,n}=\partial c$.

3. יהיו $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ מספרים מרוכבים, ונגדיר $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ע"י $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n$.

נגדיר 1-קוביה סינגולרית $C_{R,f}:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ע"י $C_{R,f}=f\circ C_{R,1}$,

2-קוביה סינגולרית $c:[0,1]^2\to\mathbb{C}$ ע"י $c(s,t)=t\cdot C_{R,n}(s)+(1-t)C_{R,f}(s)$

(א) הוכיחו ש- $\partial c = C_{R,f}-C_{R,n}$

(ב) הוכיחו ש- $c([0,1]^2)\subseteq\mathbb{C}\setminus\{0\}$ עבור R מספיק גדול.

(ג) היעזרו בסעיף (2) כדי להוכיח את המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום $z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n$ עם $a_i\in\mathbb{C}$ יש שורש ב- $\mathbb{C}$.

4. יהי P פוליגון במישור עם n קודקודים $(x_0,y_0), \dots, (x_{n-1},y_{n-1})$ שאינו חותך את עצמו. הוכיחו כי שטח של הפוליגון הוא

$$v(P) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \det\begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix}$$

כאשר נסמן $(x_n,y_n)=(x_0,y_0)$.

5. (א) חשבו את האינטגרל $\int_{\partial M}(3x-y)\,dx+(x+5y)\,dy$ כאשר $M=\overline{B_1(0)}$

בשתי דרכים: ישירות ובאמצעות משפט גרין.

(ב) חשבו את האינטגרל

$$\int_C \left(2y+\sqrt{1+x^5}\right)dx + \left(5x-e^{y^2}\right)dy$$

כאשר C היא המעגל $x^2+y^2=4$.

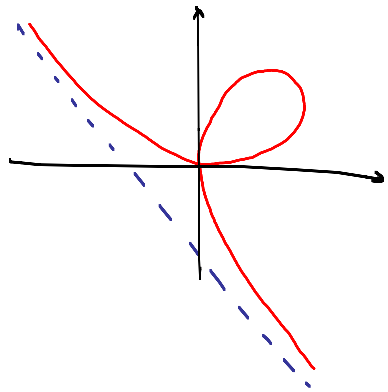
6. הוכיחו שאם $M\subseteq\mathbb{R}^2$ יריעה קומפקטית אז

$$\text{שטח של } M = v(M) = \frac{1}{2}\int_{\partial M} x\,dy - y\,dx$$

7. הוכיחו שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ הוא πab.

8. תהי C עקומת האפסים של $f(x,y) = x^3+y^3-3xy$.

C נראית כך:



חשבו את השטח התחום ע"י C ברביע הראשון,

הדרכה: השתמשו בפרמטריזציה $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$, $t \in [0,\infty)$ ובגרין.

9. יהי $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \bigcup_{p\in\mathbb{R}^3} \mathbb{R}^3_p$ השדה הוקטורי $F(x,y,z) = (2xy, 3ye^z, x\sin z)_p$.

נסמן $\omega_F^2 = F_1\, dy\wedge dz + F_2\, dz\wedge dx + F_3\, dx\wedge dy$.

חשבו את $\int_{\partial[0,1]^3} \omega_F^2$ (ישירות ובאמצעות סטוקס).