פתרון בוחן ראשון בחשבון אינפיניטסימלי 3

סמסטר ב' תשע"ד

1 (א) הוכחנו בהרצאה שאם f דיפרנציאבית אז הדיפרנציאל שלה נתון ע"י

$$df_a(v) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \partial_v f(a)$$

$$= \langle v, \nabla_a f \rangle$$

(הגדרת הגרדיאנט במקרה של פונקציה ממשית)

מכאן נובע (2), ו- (1) נובע מכך ש- df_a לינארית.

(ב) מכלל השרשרת והנתון נובע

$$(f\circ\gamma)'(0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\Big|_a \begin{pmatrix}\gamma_1'(0)\\ \gamma_2'(0)\end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot 1 = 1$$

מסעיף (א) והנתון נובע

$$\partial_{(1,2)} f(a) = \langle (1,2), \nabla_a f \rangle = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot 2 = 1$$

מכאן

$$\nabla_a f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right) = (1,0)$$

② x,y,z זוויות במשולש ולכן מקיימות $g(x,y,z) = x+y+z-\pi = 0$.

נביט בפונקציה $f(x,y,z) = \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}$ ונמצא את המקסימום שלה על $g=0$

בשיטת כופלי לגרנז'. כיוון ש $\nabla g = (1,1,1) \neq 0$, אם a נקודת קיצון על $g=0$ קיים

$\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases} \nabla_a f = \lambda \nabla_a g \\ g(a) = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_a f = \left(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2},\ \sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2},\ \sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{z}{2}\right)\Big|_a = \lambda(1,1,1)$$

כיוון ש- $0 < x,y,z < \pi$ נובע שכניסות $\nabla_a f$ שונות מ-0 ולכן ניתן לחלק את הקואורדינטות של $\nabla_a f$

זו בזו ולקבל $\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2} = \tan\frac{z}{2}$ וכיוון ש- $\tan$ חח"ע בתחום נקבל

$x=y=z$. נציב ב- $g=0$ ונקבל $x=y=z=\frac{\pi}{3}$.

כלומר, אם ל- f מקסימום על $g=0$ הוא חייב להיות ב- $a=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$.

הנקודה a היא אכן נקודת מקסימום: התחום $C=\{(x,y,z) \mid g=0,\ x,y,z \geq 0\}$

הוא קומפקטי ולכן f מקבלת בו מקסימום, וכיוון ש- $f \equiv 0$ על השפה

$C \cap \{(x,y,z) \mid xyz=0\}$ ו- $f>0$ ב- $\{(x,y,z) \mid g=0,\ x,y,z>0\}$, המקסימום מתקבל

בנקודה פנימית וחייב להיות ב- a.

③ (א) נכון. אם T פתוחה אז התמונה של $\mathbb{R}^n \supseteq B_1(0)$ תחת T

מכילה כדור סביב 0, נאמר $\mathbb{R}^m \supseteq B_\varepsilon(0)$ עבור $\varepsilon > 0$. בפרט הוקטורים

$\{\frac{\varepsilon}{2}e_1, \dots, \frac{\varepsilon}{2}e_m\}$ בתמונה. כיוון שתמונת T מרחב וקטורי המכיל m וקטורים

בת"ל, נובע ש- $m = \dim \operatorname{Im} T$ ולכן T על.

(ב) לא נכון. דוגמא נגדית

$$A = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$B = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

אז $\emptyset = A \cap B$ אבל

$$\inf\{\|(x,\tfrac{1}{x}) - (z,0)\| : 0 \neq x,z \in \mathbb{R}\} = 0$$

(ג) נכון. כיוון ש- A סגורה אז $\mathbb{R}^n \setminus A$ פתוחה ולכן יש $\varepsilon > 0$ כך ש-

$B_\varepsilon(b) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$. בפרט, לכל $x \in A$ $\|x - b\| \geq \varepsilon/2$ ולכן

$$d(A,\{b\}) = \inf_{x \in A} \|x - b\| \geq \varepsilon/2$$

(ד) נכון. לכל $b \in B$ יש $\varepsilon_b > 0$ כך ש- $B_{\varepsilon_b}(b) \cap A = \emptyset$. נסתכל

הקבוצות $I = \{B_{\varepsilon_b/2}(b) \mid b \in B\}$ מהווה כיסוי פתוח של B, ותיקנו את

ε_b ב- 2 כדי להבטיח ש- $\overline{B_{\varepsilon_b/2}(b)} \cap A = \emptyset$. מקומפקטיות יש

תת קבוצה סופית של I כך ש- $B \subseteq B_{\varepsilon_1}(b_1) \cup \dots \cup B_{\varepsilon_m}(b_m)$

והסגור של האיחוד זר ל- A. מכאן נובעת הטענה עם $\Gamma = \min\{\varepsilon_i\}$.

4) ב) נשים לב ש- $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ היא הרכבה של 3 פונקציות:

נסמן $\varphi : U \to \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$, $\varphi(x) = (f(x), g(x))$

ו $\theta : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $\theta(y) = \frac{1}{y}$

ו $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\psi(y_1, y_2) = y_1 y_2$

אז

$$q : U \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \xrightarrow{id\times\theta} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$$

$$q = \psi\circ(id\times\theta)\circ\varphi$$

- φ דיפרנציאבילית כי f ו- g דיפרנציאביליות (הוכח בהרצאה).
- θ דיפרנציאבילית (הוכח באינפי 1) ולכן גם $id\times\theta$ דיפרנציאבילית.
- ψ חלקה (כי הנגזרות החלקיות מכל סדר קיימות ורציפות).

מכאן ש- q דיפרנציאבילית כהרכבה של פונק' דיפרנציאביליות. את הדיפרנציאל שלה אפשר לחשב כהרכבה של הדיפרנציאלים של מרכיביה, או ע"י שימוש בגרדיאנט:

$$dq_a(h) = \langle h, \nabla_a q\rangle = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial q}{\partial x_n}(a)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i}(a)\, h_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, g(a) - f(a)\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right)}{g(a)^2} h_i = \frac{g(a)\cdot df_a(h) - f(a)\, dg_a(h)}{g(a)^2}$$

5 (1) ϕ היא הרכבה של שתי העתקות $\theta : A \mapsto A^{-1}$ ו- $\psi : A \mapsto A^k$.
הוכחנו בתרגילים ש- θ ו- ψ חלקות ולכן גם ϕ חלקה.

ביתר פירוט: $A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$ כאשר $(adj(A))_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji}$, M_{ji} הוא המינור ה- (j,i)
של A. בפרט, הכניסות של A^{-1} הן מנות של פולינומים כאשר המכנה $det(A) \neq 0$,
ולכן הנגזרות החלקיות של הכניסות מכל סדר קיימות ורציפות. מכאן θ חלקה.
כניסות A^k הן פולינומים בכניסות A ומאותו נימוק ψ חלקה.

(2) מסעיף (1) נובע ש- $d\phi_A = d\psi_{\theta(A)} \circ d\theta_A$, ונוכל להשתמש ישירות בגבולות הבאים
לחישוב $d\theta_A$ ו- $d\psi_{\theta(A)}$ (שקיומם כבר מובטח לנו):

$$d\theta_A(h) = \lim_{t \to 0} \frac{\theta(A+th) - \theta(A)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(A+th)^{-1} - A^{-1}}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(I + tA^{-1}h)^{-1} A^{-1} - A^{-1}}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(I - tA^{-1}h + t^2 A^{-1}hA^{-1}h + \cdots)A^{-1} - A^{-1}}{t} = -A^{-1}hA^{-1}$$

$$d\psi_B(h) = \lim_{t \to 0} \frac{\psi(B+th) - \psi(B)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(B+th)^k - B^k}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{B^k + t\sum_{i=0}^{k} B^i h B^{k-1-i} + t^2(\cdots\cdots) - B^k}{t} = \sum_{i=0}^{k-1} B^i h B^{k-1-i}$$

הצבה $B = A^{-1}$ והרכבת הדיפרנציאלים נותנת את הנוסחה המבוקשת.