פתרון בוחן שני בחשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר ב' תשע"ד

1. (א) משפט החלפת משתנה אינטגרלית:

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו- $g: A \to \mathbb{R}^n$ פונקציה דיפרנציאבילית ברציפות ונניח כך ש- $J_g(x) \neq 0$ לכל $x \in A$. אזי אם $f: g(A) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית אז

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g)\,|J_g|$$

(ב) נחשב את האינטגרל:

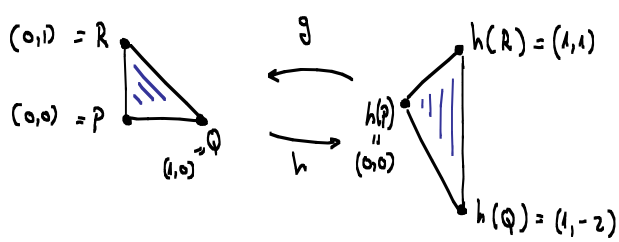
$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2\,dx\,dy = \int_{\overline{B}} \sqrt{x+y}\,(y-2x)^2$$

כאשר $B = \{(x,y) \mid x>0,\ y>0,\ x+y<0\}$.

נגדיר $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

h ליניארית והפיכה עם הפכית $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

g מקיימת את תנאי המשפט בכל $\mathbb{R}^2$, ואנו נתעניין בתחום $A = h(B)$:



מהמשפט

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f\circ g)|J_g| = \int_A \sqrt{u}\, v^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{u}\left(\int_{-2u}^{u} v^2\, dv\right) du = \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{u}\left[\frac{v^3}{3}\right]_{-2u}^{u} du = \int_0^1 u^{3\frac{1}{2}}\, du = \left[\frac{u^{9/2}}{9/2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$$

2. (א) (*) תבנית-k על V היא פונקציה $\omega : V \to \dot{\bigcup}_{p\in V} \Lambda^k(\mathbb{R}^m_p)$, כך ש- $\omega(p)\in\Lambda^k(\mathbb{R}^m_p)$,

ומתקיים תנאי החלקות הבא: אם $((e_1)_p,\dots,(e_m)_p)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^m_p$

ו- $((\varphi_1)_p,\dots,(\varphi_m)_p)$ הבסיס הדואלי, כלומר ש- $\{(\varphi_{i_1})_p\wedge\dots\wedge(\varphi_{i_k})_p \mid 1\le i_1<\dots<i_k\le m\}$

בסיס של $\Lambda^k(\mathbb{R}^m_p)$ אז $\omega = \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le m} \omega_{i_1\dots i_k}(p)\,(\varphi_{i_1})_p\wedge\dots\wedge(\varphi_{i_k})_p$,

ודורשים שהפונקציות $\omega_{i_1\dots i_k} : V\to\mathbb{R}$ תהיינה חלקות.

(**) $f^*\omega$ היא ה-k-תבנית על $\mathcal{U}$ כך ש-

$$\forall p\in\mathcal{U},\quad (f^*\omega)(p)\big((v_1)_p,\dots,(v_k)_p\big) = \omega(f(p))\big(df_p((v_1)_p),\dots,df_p((v_k)_p)\big)$$

(ב)

$$\big((g\circ f)^*\omega\big)(p)\big((v_1)_p,\dots,(v_k)_p\big) = \omega(g\circ f(p))\big(d(g\circ f)_p((v_1)_p),\dots,d(g\circ f)_p((v_k)_p)\big)$$

ההגדרה עבור $g\circ f$

דיפרנציאל של ההרכבה $= \omega(g(f(p)))\big(dg_{f(p)}\circ df_p((v_1)_p),\dots,dg_{f(p)}\circ df_p((v_k)_p)\big)$

ההגדרה עבור g $= (g^*\omega)(f(p))\big(df_p((v_1)_p),\dots,df_p((v_k)_p)\big)$

ההגדרה עבור f $= f^*(g^*\omega)(p)\big((v_1)_p,\dots,(v_k)_p\big)$

(ב)

$$(f^*\omega)(x,y)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \omega(f(x,y))\left(df_{(x,y)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right)$$

$$= (x\sin y)^2\cdot\left((\sin y,\ x\cos y)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right) = x^2\sin^3 y\cdot\alpha + x^3\sin^2 y\cos y\cdot\beta$$

לחלופין אפשר להשתמש ב-

$$f^*(t^2dt) = f^*d\left(\frac{t^3}{3}\right) = d\left(f^*\left(\frac{t^3}{3}\right)\right) = d\left(\frac{f^3}{3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f^3/3\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(f^3/3\right)dy$$

$$= f^2\cdot\sin y\,dx + f^2 x\cos y\,dy = x^2\sin^3 y\,dx + x^3\sin^2 y\cos y\,dy$$

3. ההעתקה $g: x\mapsto a^{-1}x$, $M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R})$ היא לינארית והפיכה, ובפרט מעתיקה את הקבוצה הפתוחה $GL_n(\mathbb{R})$, אל עצמה (על). f אינטגרבילית בתחום ולכן ניתן להשתמש במשפט החלפת המשתנה על $GL_n(\mathbb{R})\subseteq M_n(\mathbb{R})\simeq\mathbb{R}^{n^2}$.

במילים אחרות $g: \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{x} \mapsto \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ a^{-1}v_1 & \cdots & a^{-1}v_n \\ | & & | \end{bmatrix}}_{a^{-1}x}$ או $g\begin{bmatrix}[v_1]\\ \vdots\\ [v_n]\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & a^{-1}\end{bmatrix}}_{\in M_{n^2}(\mathbb{R})}\begin{bmatrix}[v_1]\\ \vdots\\ [v_n]\end{bmatrix}$

ברור ש- $dg=g$. ולכן היעקוביאן של g הוא $(\det(a^{-1}))^n$. מכאן

$$I(f_a) = \int_{\substack{a^{-1}GL_n(\mathbb{R})\\ \| \\ GL_n(\mathbb{R})}} \frac{f(ax)}{|\det(x)|^n} = \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{f(aa^{-1}x)}{|\det(a^{-1}x)|^n}\cdot|\det(a^{-n})| \underset{\uparrow}{=} \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{f(x)}{|\det(x)|^n} = I(f)$$

כפליות דטרמיננטה
וערך מוחלט

(א) .4

$$\int_\gamma \langle F,T\rangle = \int_0^1 \langle F(\gamma(t)),\ T(\gamma(t))\rangle \,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

$$= \int_0^1 \left\langle F(\gamma(t)),\ \frac{\gamma'(t)}{\cancel{\|\gamma'(t)\|}}\right\rangle \cancel{\|\gamma'(t)\|}\,dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n F_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 F_i(\gamma(t))\,\gamma_i'(t)\,dt$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]} \gamma^* F_i \underset{\int_\gamma F_i dx_i \text{ הגדרת}}{=} \sum_{i=1}^n \int_\gamma F_i dx_i = \int_\gamma \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_\gamma \omega_F$$

(ב) נשים לב ש- $F = \nabla f$ כאשר $f(x,y,z) = xyz$ ולכן

$$\int_\gamma \langle F,T\rangle \underset{\text{(א)}}{=} \int_\gamma \omega_F = \int_\gamma \sum_{i=1}^n F_i dx_i = \int_\gamma df \underset{\text{סטוקס}}{=} \int_{\partial\gamma} f = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = 1 - 0 = 1$$