תאריך הבוחן:	22.11.2013
שם המרצה:	אורי און
שם הקורס:	חשבון אינפיניטסימלי 3
מספר הקורס:	201.1.0031
שנה:	תשע"ד
סמסטר:	א'
מועד:	בוחן ראשון
משך הבוחן:	2 שעות
חומר עזר:	מודוס פוננס

בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 3

בבוחן 4 שאלות במשקל כולל של 120 נקודות. ענו על כל השאלות. הציון בבוחן יהיה 100 לכל היותר. נא נמקו היטב את טענותיכם וכתבו בכתב יד ברור. בהצלחה!

שאלה 1 (30 נקודות)

(א) תהא $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f: U \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית בנקודה $a \in U$.

לכל $v \in \mathbb{R}^n$ נסמן ב- $\partial_v f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$ את הנגזרת הכיוונית של f בכיוון v בנקודה a.

(1) הוכיחו ש- $\partial_{v+\alpha u} f(a) = \partial_v f(a) + \alpha \partial_u f(a)$ עבור $v,u \in \mathbb{R}^n$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$.

(2) הוכיחו ש- $\partial_v f(a) = \langle v, \nabla_a f \rangle$.

(ב) תהא $f: B_\varepsilon(a) \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית על הכדור ברדיוס ε סביב הנקודה $a = (1,0)$ ב- $\mathbb{R}^2$.

תהא $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ המסילה $\gamma(t) = (e^t, \sin(t))$.

נתון ש- $(f \circ \gamma)'(0) = 1$ וש- $\partial_{(1,2)} f(a) = 1$. חשבו את $\nabla_a f$.

שאלה 2 (20 נקודות)

הוכיחו שאם x, y, z זוויות במשולש אז $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)\sin\left(\frac{z}{2}\right) \le \frac{1}{8}$.

שאלה 3 (40 נקודות)

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמא נגדית כל אחת מהטענות הבאות.

(א) תהא $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. אם T פתוחה אז T על.

עבור $A, B \subset \mathbb{R}^n$ נגדיר $d(A,B) = \inf\{\|x-y\| : x \in A, y \in B\}$.

(ב) אם A ו- B סגורות אז יש נקודות $a \in A, b \in B$ כך ש- $\|a-b\| = d(A,B)$.

(ג) אם $A \subset \mathbb{R}^n$ סגורה ו- $b \in \mathbb{R}^n \setminus A$. אז קיים $\delta > 0$ כך ש $d(A,\{b\}) \ge \delta$.

(ד) אם $A \subset \mathbb{R}^n$ סגורה ו- $B \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית כך שחיתוכן ריק אז קיים $\delta > 0$ כך ש- $d(A,B) \ge \delta$.

המשך ....

שאלה 4 (30 נקודות)

(א) תהא $U \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה, ו- $f, g: U \to \mathbb{R}$ דיפרנציאביליות בכל U. הוכיחו שאם g אינה מתאפסת ב- U אז הפונקציה $q(x) := f(x)/g(x)$ דיפרנציאבילית בכל U וחשבו את הדיפרנציאל שלה.

(ב) יהיו $k, n \in \mathbb{N}$. תהא $\phi: GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$ ההעתקה $\phi(A) = A^{-k}$.

(1) הוכיחו ש- ϕ חלקה.

(2) הוכיחו שהדיפרנציאל של ϕ בנקודה $A \in GL_n(\mathbb{R})$ הוא

$$d\phi_A(h) = -\sum_{i=0}^{k-1} A^{-i-1} h A^{-k+i} \qquad (h \in M_n(\mathbb{R}))$$