

תאריך הבוחן :	20.12.2013
שם המרצה :	אורי און
שם הקורס :	חשבון אינפיניטסימלי 3
מספר הקורס :	201.1.0031
שנה :	תשע"ד
סמסטר :	א'
מועד :	בוחן שני
משך הבוחן :	3 שעות
חומר עזר :	מודוס פוננס

בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 3

בבוחן 4 שאלות במשקל כולל של 120 נקודות. ענו על כל השאלות. הציון בבוחן יהיה 100 לכל היותר. נא נמקו היטב את טענותיכם וכתבו בכתב יד ברור. בהצלחה!

שאלה 1 (30 נקודות)

תהא $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2)$.

- (א) מצאו פונקציה פולינומיאלית $p(x, y)$ כך ש- $f(x, y) - p(x, y) = o(\|(x, y)\|^4)$.
- (ב) קבעו האם הנקודה $(0,0)$ היא נקודת מינימום מקומי, מקסימום מקומי, אוכף (או אף לא אחת מאפשרויות אלו) של הפונקציה f .

שאלה 2 (30 נקודות)

הוכיחו ש- $\{B_1(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Z}^3\}$, אוסף הכדורים הפתוחים ברדיוס 1 סביב הנקודות השלמות ב- \mathbb{R}^3 , הוא כיסוי של \mathbb{R}^3 ומצאו פיצול יחידה הכפוף לו.

שאלה 3 (30 נקודות)

- (א) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy$. (10 נקודות)
- (ב) תהא $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המציינת של היחידון $\{0\}$, ותהא $f(x, y, z) = \chi(\sin(z^3 x^3 y^3 - z^2 x^2 y^2 + x))$ הוכיחו ש- f אינטגרבילית על \mathbb{R}^3 . (20 נקודות)

שאלה 4 (30 נקודות)

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמא נגדית את הטענות הבאות.

- (א) לקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - \sqrt{2}x \in \mathbb{Q}\}$ מידה (דו-מימדית) אפס.
- (ב) תהא $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, חסומה ואי-שלילית על קבוצה מדידה גיורדן $C \subset \mathbb{R}^n$. אז הקבוצה $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x), x \in C\}$ מדידה גיורדן.