בוחן II באינפי3: פתרונות

שאלה 1. (30 נקודות)
תהא $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x,y)=\sin(x^2-y^2)$.

(א) מצאו פונקציה פולינומיאלית $p(x,y)$ כך ש- $f(x,y)-p(x,y)=o\left(\|(x,y)\|^4\right)$.

פתרון:
נסמן ב- $p^{(4)}_{f,(0,0)}(x,y)$ את פולינום טיילור מסדר 4 של f סביב הראשית, וכיוון ש- f דיפרנציאבילית 4 פעמים בראשית (למעשה, היא חלקה בכל המישור) כי $f(x,y)-p^{(4)}_{f,(0,0)}(x,y)=o(\|(x,y)\|^4)$. אם כן, $p^{(4)}_{f,(0,0)}(x,y)$ עונה לדרישות. נוכל גם לשים לב כי $f=g\circ h$ כאשר $g(t)=\sin t$; $h(x,y)=x^2-y^2$, וראינו בתרגילי הבית (ובתרגול) דוגמאות הרומזות כי ניתן להרכיב את פולינומי טיילור של g,h מסדר 4 ולמחוק גורמים מסדר גבוה יותר כדי לקבל את הפולינום של f. כאן

$$p^{(4)}_{g,0}(t)=t-\frac{t^3}{6};\quad p^{(4)}_{h,(0,0)}(x,y)=h(x,y)=x^2-y^2,$$

כך שהגיוני לצפות ש-

$$p(x,y)=p^{(4)}_{g,0}\circ p^{(4)}_{h,(0,0)}(x,y)=(x^2-y^2)-\cancelto{\deg>4}{\frac{(x^2-y^2)^3}{6}}=x^2-y^2$$

יעמוד בדרישות (אפילו אם--א-פריורית--לא הראינו כי זהו אכן $p^{(4)}_{f,(0,0)}(x,y)$). ואכן, נוכיח כי זה עובד כאן: אנו יודעים ממשפט טיילור ומכך ש- g דיפרנציאבילית פעמיים באפס (למעשה, היא חלקה) כי $\sin t-t=o(t^2)$. נשים לב כי

$$\frac{\sin(x^2-y^2)-(x^2-y^2)}{\|(x,y)\|^4}=\left(\frac{\sin(x^2-y^2)-(x^2-y^2)}{(x^2-y^2)^2}\right)\left(\frac{x^2-y^2}{\|(x,y)\|^2}\right)^2$$

וידוע לנו אם כן כי הגורם הראשון שואף לאפס כאשר $(x,y)\to 0$ (שכן $\lim_{(x,y)\to 0}(x^2-y^2)=0$). די, אם כן, להבחין כי הגורם השני חסום בסביבת הראשית, ואמנם

$$\left|\frac{x^2-y^2}{\|(x,y)\|^2}\right|=\frac{|x^2-y^2|}{x^2+y^2}\le\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1$$

לסיום, נבחין שבאופן כללי לא מספיק לקחת פולינום טיילור עד סדר 3 כדי לקבל שגיאה ממחלקת $o(\|x\|^4)$, טענה שחזרה על עצמה בתשובות (כדי להבין למה, התבוננו ב- $t\mapsto t^4$, למשל).

(ב) קבעו האם הנקודה $(0,0)$ היא מינימום מקומי, מקסימום מקומי, אוכף (או אף לא אחת מאפשרויות אלו) של הפונקציה f.

פתרון:
קל לוודא כי $df_{(0,0)}=0$ וכי $\mathrm{Hess}_f(0,0)=\left[\begin{smallmatrix}2&0\\0&-2\end{smallmatrix}\right]$, וכיוון שיש לה ע"ע חיובי וע"ע שלילי הרי מדובר באוכף. יתר על כן, ניתן להבחין כי $\sin$ הינה מונוטונית עולה בסביבה של $h(0,0)=0$, ולכן הנקודה הקריטית של f הינה מאותו הסוג כשל h; דבר זה יכול לעזור בחישובים, אם כי אינו הכרחי כאן.

כמו כן, נזכיר כי הגדרת אוכף היא שישנו ישר העובר דרך הנקודה לאורכו הפונקציה מקבלת מינימום, וישר אחר לאורכו היא מקבלת מקסימום. לא מספיק שנקודה אינה מינימום ואינה מקסימום, אפילו אם היא נקודה קריטית.

שאלה 2. (30 נקודות)
הוכיחו ש- $\{B_1(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Z}^3\}$, אוסף הכדורים הפתוחים ברדיוס 1 סביב הנקודות השלמות ב- $\mathbb{R}^3$, הוא כיסוי של $\mathbb{R}^3$ ומצאו פיצול יחידה הכפוף לו.
פתרון:
נוכל כמובן לכסות את $\mathbb{R}^3$ ע"י הזזות של הקוביה $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^3$ ע"י איברים מ- $\mathbb{Z}^3$, כלומר ע"י הקוביות:

$$C_{a,b,c} = \left[a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right] \times \left[b - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2}\right] \times \left[c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}\right]; \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

והרי כל $C_{a,b,c} \subset B_1(a,b,c)$ שכן $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} < 1$. לכן $\{B_1(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{Z}\}$ כיסוי של $\mathbb{R}^3$.

פיצול יחידה הכפוף לו: נבחר איזה $\sqrt{\frac{3}{4}} < r < 1$, למשל $r = \frac{2013}{2014}$, ונגדיר לכל $\alpha \in \mathbb{Z}^3$ את הפונקציה

$$\psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r^2 - \|x-\alpha\|^2}} & \|x - \alpha\| < r \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אזי:

- ψ_α אי-שלילית וחלקה כהרכבת פונקציות חלקות.
- $\operatorname{supp}(\psi_\alpha) = \overline{B_r(\alpha)} \subset B_1(\alpha)$ כך ש- $\{\psi_\alpha\}$ כפוף לכיסוי.
- $\{\operatorname{supp}(\psi_\alpha)\}$ סופי מקומית (שכן לכל $x \in \mathbb{R}^3$ מתקיים $8 \leq |B_1(x) \cap \mathbb{Z}^3|$), וכן קיימת איזו ψ_α החיובית ממש בכל נקודה במרחב (שכן $\sqrt{\frac{3}{4}} < r$).

לכן $\varphi_\alpha = \frac{\psi_\alpha}{\sum_{\beta \in \mathbb{Z}^3} \psi_\beta}$ פיצול יחידה כנדרש.

שאלה 3. (30 נקודות)

(א) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx\right) dy$. (10 נקודות)
פתרון:
אנו שמים לב כי $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת $f(x,y) = e^{-x^2}\chi_{y \leq x}$ הינה חסומה ורציפה בכל מקום פרט לאלכסון (שהינו בעל מידה אפס), ולפיכך ממשפט פוביני נקבל כי

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx\right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{-x^2} \chi_{y \leq x}(x,y) dx\right) dy = \int_{[0,1]^2} e^{-x^2} \chi_{y \leq x}(x,y) d(x,y) =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{-x^2} \chi_{y \leq x}(x,y) dy\right) dx = \int_0^1 e^{-x^2} \left(\int_0^x dy\right) dx = \int_0^1 x e^{-x^2} dx = \frac{1 - e^{-1}}{2}$$

(ב) תהא $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הפונקציה המציינת של היחידון $\{0\}$, ותהא

$$f(x,y,z) = \chi\left(\sin\left(z^3x^3y^3 - z^2x^2y^2 + x\right)\right)$$

הוכיחו ש- f אינטגרבילית על $\mathbb{R}^3$. (20 נקודות)
פתרון:
ראשית, נבין במה מדובר. נסמן $p(x,y,z) = z^3x^3y^3 - z^2x^2y^2 + x$, ונבחין כי f אי-שלילית ומתאפסת בכל מקום מלבד $p^{-1}[\pi\mathbb{Z}] = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid p(x,y,z) \in \pi\mathbb{Z}\}$. אנו מבחינים 'אינטואיטיבית' שזוהי קבוצה בעלת מידה אפס. אם נראה זאת, הרי נקבל כי f אינטגרבילית מקומית. יתרה מזאת, נקבל גם כי לכל $0 < R$, $\int_{C_R} f(x,y,z) d(x,y,z) = 0$ כאשר $C_R = [-R,R]^3$, והדבר מספיק (מדוע?! חשבו על פיצולי יחידה של $\mathbb{R}^3$ ועל העובדה ש- f חיובית) לכך ש- f אינטגרבילית על $\mathbb{R}^3$.

אם כן, כדי להוכיח את הדרוש נוח (ומספיק) להראות כי $P_k := p^{-1}(\pi k)$ בעלת מידה אפס לכל $k \in \mathbb{Z}$. אנו מתעיינים אם כן באוסף הנקודות (x,y,z) כך ש- $p(x,y,z) = \pi k$. אנו מבחינים כי

$$\nabla p(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} 1 + yz \cdot (xyz)\,(3(xyz)-2)) \\ xz \cdot (xyz)\,(3(xyz)-2)) \\ xy \cdot (xyz)\,(3(xyz)-2)) \end{pmatrix}$$

וכי הוא לעולם אינו מתאפס (שני הרכיבים האחרונים מתאפסים יחדיו, וכאשר זה קורה הרכיב הראשון מתפתח ל- 1). לכן ידוע לנו ממשפט הפונקציה הסתומה כי באופן מקומי P_k הינו גרף של פונקציה גזירה ברציפות. נבחין כי P_k סגור, ולכן לכל $n > 0$ נקבל כי $P_k \cap C_n$ קומפקטית, כלומר ניתנת להצגה כאיחוד מספר סופי של גרפים שכאלו. כעת, ידוע לנו ממהרצאה שכל גרף שכזה הינו בעל מידה אפס, ולכן גם $P_k \cap C_n$ בעלת מידה אפס, ולכן גם $P_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_k \cap C_n$, כנדרש.

לסיום, יש לשים לב לכמה נקודות:

1. ה'אינטגרביליות' המצויינת בתרגיל מתייחסת למושג שלמדנו העושה שימוש בפיצול יחידה, שכן התחום $\mathbb{R}^3$ איננו מדיד-ג'ורדן. זה לא מספיק שאוסף נקודות אי-הרציפות של הפונקציה בעל מידה אפס (אבל, שוב, כן מספיק שהיא מתאפסת מחוץ לקבוצה בעלת מידה אפס. מדוע?)
2. חשוב גם להבחין שהפונקציה מתאפסת ביותר נקודות מאשר האפסים של הפולינום. לסינוס, כידוע, יש מחזור.
3. ולבסוף, גם לפולינום (עם קבוע כלשהו שהוא כפולה שלמה של π) ישנם אפסים רבים מאוד. סטודנטים רבים הבחינו שהמישורים לאורכם אחד המשתנים אפס הם חלק מהקבוצה, אולם עלתה הסברה כי שאר האפסים הינם בנקודות מבודדות, או שקיים מספר בן-מניה של אפסים כאלו, או אפילו מספר סופי. לא כך הם פני הדברים, שכן דיי לבחור x, y שונים אפס כלשהם כדי שיתקבל פולינום ממעלה 3 ב- z שעבורו אפס אינו שורש. כידוע לנו, לפולינום כזה יש לכל הפחות שורש ממשי אחד. כעת, שימו לב שהבחירה ב- x, y הייתה שרירותית לגמרי, או שימו לב לכך שהבחנו כי מקומית אוסף האפסים הינו גרף של פונקציה חלקה; בכל דרך נבין כי ישנו רצף של אפסים, גם אם הוא מהווה קבוצה דלילה (nowhere-dense) ובעלת מידה אפס ב- $\mathbb{R}^3$.

שאלה 4. (30 נקודות)

הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמא נגדית את הטענות הבאות.

(א) לקבוצה $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - \sqrt{2}x \in \mathbb{Q}\right\}$ מידה (דו-מימדית) אפס.

פתרון:

נשים לב כי נוכל להציג את הקבוצה $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left\{(x, \sqrt{2}x + q) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$, ולכן דיי (והכרחי) להראות שלכל $q \in \mathbb{Q}$ הישר $\left\{(x, \sqrt{2}x + q) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ הינו בעל מידה אפס. זהו כמובן גרף ההעתקה החלקה $x \mapsto \sqrt{2}x + q$, כך שאנו יודעים כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ חיתוך הגרף עם $[n, n+1] \times \mathbb{R}$ הינו בעל מידה אפס, ומכאן כי גם הגרף כולו.

פתרון יצירתי נוסף (מאחת המחברות): הקבוצה המבוקשת הינה $A\left[\mathbb{R} \times \mathbb{Q}\right]$ כאשר $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \end{smallmatrix}\right)$, והרי אנו יודעים כי תמונת קבוצה ממידה אפס תחת העתקה ליניארית (או, במקרה הכללי, ליפשיץ) הינה ממידה אפס.

לסיום, נחדד:

1. הגדרת הקבוצה בשאלה לא קשורה לרציונאליות של x או של y (מלבד העובדה שהיא אינה חותכת את $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$). אכן, החלק ה'מעניין' (זה שאינו מיידית בעל מידה אפס) של הקבוצה הוא זה המוכל ב- $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$, ואולם לא ניתן 'להיפטר' ממנו באותה הקלות.
2. חשוב מאוד להבחין ששיקולי עצמות אינם רלוונטיים לשאלות מן הסוג הזה. אמנם כל קבוצה בת-מניה הינה בעלת מידה אפס, אך הדבר רחוק משקילות. ואכן, $|\mathbb{R} \times \{0\}| = |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|$, כידוע לנו. נשים לב כי הקבוצה לעיל אינה בת-מניה.

(ב) תהא $f:C\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, חסומה ואי-שלילית על קבוצה מדידה ג'ורדן $C\subset\mathbb{R}^n$. אז הקבוצה $\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\mid 0\le y\le f(x), x\in C\}$ מדידה ג'ורדן.

פתרון:

העובדה כי הקבוצה הנ"ל חסומה נובעת מיידית מכך ש- f,C חסומות (במובן המתאים). עלינו, אם כן, לבחון את שפת הקבוצה; נבחין כי, אם $f\le M$, הרי ששפת הקבוצה מוכלת ב-

$$(\partial C\times[0,M])\cup(C\times\{0\})\cup\Gamma(f)$$

(שכן ברור אי אם $x\notin\partial C$ או $y\notin\{0,f(x)\}$ הרי מרציפות f קיימת סביבה של (x,y) שאינה חותכת את הקבוצה הנ"ל.)

אם כן, דיי (וגם הכרחי. מדוע?) שגרף הפונקציה, $\Gamma(f)$, יהא בעל מידה אפס. ואולם ראינו בהרצאה משפט לפיו גרף של פונקציה המוגדרת על תחום קומפקטי ואוסף נקודות אי-הרציפות שלה בעל מידה אפס הינו בעל מידה אפס; נוכל להשתמש בו ע"י הרחבת f לפונקציה $\hat{f}:\overline{C}\to\mathbb{R}$ ע"י הגדרתו כאפס בכל מקום שלא היה מוגדר קודם לכן (מדוע התחום קומפקטי כעת? ומדוע היא רציפה כמעט בכל מקום?).

כמובן שנוכל לנצל אינטגרביליות כדי להוכיח את הדרוש ידנית (למעשה אנו מוכיחים מחדש את הטענה): אם ניקח תיבה המכילה את C ונרחיב את f לפונקציה $\tilde{f}$ על התיבה, לכל $0<\epsilon$ נמצא חלוקה $\mathcal{P}$ של התיבה כך ש-

$$\sum_{R\in\mathcal{P}}V(R)\left(\sup_R\tilde{f}-\inf_R\tilde{f}\right)<\epsilon,$$

וקיבלנו כי

$$\Gamma(f)\subset\Gamma(\tilde{f})\subset\bigcup_{R\in\mathcal{P}}\left(R\times\left[\inf_R\tilde{f},\sup_R\tilde{f}\right]\right)$$

הינו כיסוי בעל נפח כולל קטן מ- ϵ.