

תאריך הבוחן :	31.01.2014
שם המרצה :	אורי און
שם הקורס :	חשבון אינפיניטסימלי 3
מספר הקורס :	201.1.0031
שנה :	תשע"ד
סמסטר :	א'
מועד :	בוחן שלישי
משך הבוחן :	3 שעות
חומר עזר :	מודוס פוננס

בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 3

בבוחן 4 שאלות במשקל כולל של 120 נקודות. אפשר לענות על כל השאלות. הציון בבוחן יהיה 100 לכל היותר. נא נמקו היטב את טענותיכם וכתבו בכתב יד ברור. בהצלחה!

שאלה 1 (30 נקודות)

- (א) נסחו את משפט החלפת משתנה אינטגרציה לקבוצה פתוחה ב- \mathbb{R}^n .
 (ב) חשבו את האינטגרל $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dy dx$.

שאלה 2 (30 נקודות)

- תהינה $U \subset \mathbb{R}^n$ ו- $V \subset \mathbb{R}^m$ קבוצות פתוחות ותהא $f: U \rightarrow V$ פונקציה חלקה.
 (א) (*) הגדירו מהי k -תבנית אנטי-סימטרית וחלקה ω על V .
 (*) הגדירו את $f^*\omega$.
 (ב) תהא $W \subset \mathbb{R}^l$ קבוצה פתוחה, $g: V \rightarrow W$ פונקציה חלקה ו- ω k -תבנית כמו ב- (א). הוכיחו ש- $(g \circ f)^*\omega = f^*(g^*\omega)$.
 (ג) נניח ש $V = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^2$ ו- $\omega = t^2 dt$, $f(x, y) = x \sin(y)$. חשבו את $f^*\omega$.

שאלה 3 (30 נקודות)

נסמן ב- $GL_n(\mathbb{R})$ את אוסף המטריצות הממשיות ההפיכות מגודל $n \times n$. לכל פונקציה רציפה $f: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ עם תומך קומפקטי נסמן

$$I(f) = \int_{GL_n(\mathbb{R})} \frac{f(x)}{|\det(x)|^n}$$

הוכיחו שלכל $a \in GL_n(\mathbb{R})$ מתקיים $I(f_a) = I(f)$ כאשר $f_a(x) := f(ax)$.

שאלה 4 (30 נקודות)

תהא $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ מסילה חלקה ויהי $F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{R}^n \rightarrow \cup_{p \in \mathbb{R}^n} \mathbb{R}_p^n$ שדה וקטורי על \mathbb{R}^n .

לכל $a \in [0,1]$ נסמן ב- $T(\gamma(a)) \in \mathbb{R}_{\gamma(a)}^n$ את הוקטור המשיק ל- γ בנקודה $\gamma(a)$ שאורכו 1.

תהא $\omega_F := \sum_{i=1}^n F_i dx_i$ 1-תבנית המתאימה ל- F ונגדיר

$$\int_{\gamma} \langle F, T \rangle := \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), T(\gamma(t)) \rangle \|\gamma'(t)\| dt$$

(א) הוכיחו ש- $\int_{\gamma} \langle F, T \rangle = \int_{\gamma} \omega_F$.

(ב) תהא $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ המסילה $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ו- $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \cup_{p \in \mathbb{R}^3} \mathbb{R}_p^3$ השדה הוקטורי

המוגדר על ידי $F(p) = (yz, xz, xy)_p$ עבור $p = (x, y, z)$. חשבו את $\int_{\gamma} \langle F, T \rangle$.