יום שלישי 22/10/13

אינפי 3 - הרצאות

מייל המתרגל- yonatany@post.bgu.ac.il

מבנה הקורס- 3 בחנים, כל אחד במשקל של 30%, עבודות הגשה בשני, 10% עליהן יינתן ציון.

הרצאה מס' 1 - 22/10 (מרצה מ"מ: יוני יחזקאלי)

טופולוגיה ב- $\mathbb{R}^n$:

נורמה ב- $\mathbb{R}^n$ - נרחיב את מושג הגודל של $x\in\mathbb{R}^n$;

זו הנורמה האוקלידית המוגדרת כך:

$$\|x\|=\|x\|_2=\sqrt{\langle x,x\rangle}=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2} \Rightarrow$$ זו נקראת נורמה

תכונות הנורמה

א) אי שליליות - $\|x\|=0 \iff \underline{x}=0$ וכן $0\le\|x\|$.

ב) כפל בסקלר - אם $\alpha\in\mathbb{R}$ אז $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$

ג) א.ש המשולש - $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

מרחק בין נקודות - אם $x,y\in\mathbb{R}^n$, המרחק ביניהם מוגדר להיות $\|x-y\|$ (המרחק בין x ל-y הוא לכל היותר סכום המרחקים בין x ל-z ו-y ל-z - זהו מימוש אי שוויון המשולש).

<u>הגדרה</u> - $B_r(x)=\{y\in\mathbb{R}^n : \|y-x\|<r\}$ הינו כדור ברדיוס r סביב x.

<u>הגדרה</u> - אם $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $x\in\mathbb{R}^n$, נאמר כי A היא סביבה של x אם קיים $B_r(x)\subseteq A$ [או לחלופין קיים $r>0$ כך ש- $B_r(x)\subseteq A$]!

<u>הגדרה</u> - קב' $U\subseteq\mathbb{R}^n$ היא **פתוחה** אם היא סביבה של כל איבריה

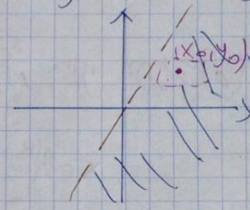
דוגמאות לקבוצות פתוחות

א) $\mathbb{R}^n$ (כי הוא סביבה של איבריו), $\emptyset$ (באופן ריק)

ב) כדור $B_r(x)$ [נובע מאי שוויון המשולש שמאפשר למצוא כדור ברדיוס קטן יותר סביב $y \in B_r(x)$).

ג) קבוצות מהסוג ... - נדון בהמשך

ד) נוכיח כי $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>y\}$ הינה פתוחה



הוכחה- עבור $x_0>y_0$, נמצא כדור סביב (x_0,y_0), ניקח $r=\frac{x_0-y_0}{3}$

ואם $(x,y)\in B_r(x_0,y_0)$, אזי

$$r > \|(x_0,y_0)-(x,y)\| = \sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2} \overset{1}{\geq} |x_0-x| \geq x_0-x$$

$$\overset{2}{\geq} |y_0-y| \geq y-y_0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x > x_0-r \\ y < y_0+r \end{cases} \Rightarrow x-y > x_0-y_0-2r > 0$$

$$x-y > x_0-y_0-\frac{2}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0$$

$$x-y > \frac{1}{3}(x_0-y_0)$$

טענה- אם $\mathcal{U}\subseteq P(\mathbb{R}^n)$ אוסף של תתי קבוצות של $\mathbb{R}^n$, כך שלכל $u\in\mathcal{U}$ פתוחה, אזי $\bigcup\mathcal{U}$ פתוחה

$$\bigcup\mathcal{U}=\{x\in\mathbb{R}^n : \exists u\in\mathcal{U} : x\in u\}$$

או לחלופין כ- $\bigcup_{i\in I} u_i$ כאשר I קב׳ אינדקסים כלשהי!

זה נובע מכך שכל u היא פתוחה ולכן מכילה סביבה של איבריה והסביבה הזו נמצאת גם באיחוד, כי היא נמצאת באחד מ-u_i באיחוד.

טענה- אם $u_1,\dots,u_n\in\mathbb{R}^n$ פתוחות אז $\bigcap_{j=1}^{n} u_j$ פתוחה,

מפני שחיתוך סופי של $B_{r_j}(x)$ הוא

$B_{\min\{r_j\}_{j=1}^{n}}(x)$ ⇐ לכל הכדורים מרכז זהה

תוצאות – $x-y>\frac{1}{3}(x_0-y_0)$ לכן כל $\frac{1}{3}(x_0-y_0)>r$ ישרת אותנו בהוכחה שזו קב׳ פתוחה

גבול במובן של סדרות - אם $(x_m)_m \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ נאמר כי $\lim_{m\to\infty} x_m = x$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m \geq N$ מתקיים

$$x_m \in B_\varepsilon(x) \iff \|x_m - x\| < \varepsilon$$

ניסוח על ידי סביבות - לכל סביבה U של x קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m\geq N$, $x_m\in U$.

ניסוח בלשון הקואורדינטות - לכל $1\le j\le n$, $(x_k)_j \xrightarrow[k\to\infty]{} x_j$

$$|(x_k)_j - x_j| \le \sqrt{\sum_i |(x_k)_i - x_i|^2} \overset{?}{\le} \max_{1\le i\le n} |(x_k)_i - x_i|$$

כלומר $\|x_k - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

ולכן $\big|\|x_k\|-\|x\|\big| \le \|x_k - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} \|0\| = 0$

תרגיל - אם $x_k \to x$ אז $\|x_k\| \to \|x\|$

פתרון - אי שוויון המשולש ההפוך נותן כי $\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x\pm y\|$

נראה כי אי שוויון המשולש נותן כי $\|x\| \le \|x\pm y\| + \|\pm y\|$

ואז מעבירים אגפים - פעם אחת $\|x\| - \|y\| \le \|x\pm y\|$

ופעם אחרת $\|y\|-\|x\| \le \dots$

הגדרה - אומרים כי $F\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה אם $\mathbb{R}^n \setminus F$ פתוחה

משפט - $F\subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה $\iff$ לכל סדרה $x_k \to x$, $(x_k)\subseteq F$ מתקיים כי $x\in F$

תכונות של קבוצות סגורות

- $\mathbb{R}^n, \emptyset$ סגורות כמשלימות של פתוחות
- איחוד סופי של סגורות הוא סגורה. } זה מורגן מהכלל
- חיתוך כלשהו של סגורות הוא סגורה. } ההפוך לגבי קב' פתוחות

הגדרה - תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$, הסגור של A הינו

$$\bar{A} = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \text{כל סביבה של } x \text{ מכילה נק' מ-} A\} = \{\text{גבולות של סדרות מתכנסות ב-} A\} = \bigcap_{\substack{A\subseteq F \\ \text{סגורה}}} F$$

חיתוך בין כל הסגורות המכילות את A וזוהי קב' סגורה קטנה ביותר המכילה את A.

הגדרה - הפנים של A הוא

$int(A)=\mathring{A}=\{x\in\mathbb{R}^n \mid A$ סביבה של $x\} = \bigcup_{O\subseteq A} O$ = איחוד כל הפתוחות המוכלות ב-A, O פתוחה

זוהי הפתוחה הכי גדולה שמוכלת את A

הגדרה - תהא $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ או לחלופין עבור $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה $f:U\to\mathbb{R}^m$, תהא $x_0\in\mathbb{R}^n$ (או לחלופין $x_0\in U$). אנו נאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x)=L\in\mathbb{R}^m$ אם: (אחד מהשקולים הבאים)

א. לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שאם $0<\|x-x_0\|<\delta$ אזי $\|f(x)-L\|<\varepsilon$

ב. לכל $\varepsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך ש- $B_\delta(x_0)\subseteq \underbrace{f^{-1}(B_\varepsilon(L))}_{\{x\in\mathbb{R}^n \mid f(x)\in B_\varepsilon(L)\}}$

ג. לכל סביבה U של L, $f^{-1}[U]$ הינה סביבה של x_0.

ד. במובן של קואורדינטות - לכל $1\le j\le m$, $L_j=\lim_{x\to x_0} f(x)_j$

כאשר $L=(L_1,\dots,L_m)$

ה. לכל $(x_k)\subset\mathbb{R}^n$ (או לחלופין $(x_k)\subset U$), כך ש- $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$ (התכנסות ב-$\mathbb{R}^n$), מתקיים כי $f(x_k)\to L$ ב-$\mathbb{R}^m$. - תרגיל

הערה - אין הבדל מהותי בגבולות של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

תרגיל - מצאו אם קיים $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ - הגבול בראשית הצירים

א.
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\ne(0,0)\\ \text{משהו} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון -
$$0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\le\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}0$$

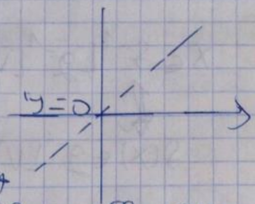
לכן הגבול הוא אפס

1. $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ עבור $(x,y)\ne(0,0)$ ו-0 אחרת

נראה שהגבול לא קיים בראשית, על ידי מציאת 2 מסלולים שיתנו ערכים שונים לגבול

* לאורך המסלול $y=x$ נקבל

$$f(x,x)=\cancel{\frac{x^2}{x^2+x^2}}\ \frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$



* לאורך המסלול $y=0$ נקבל $f(x,0)=\overset{\text{זהותית}}{0}$

* באופן כללי המסלול $y=kx$ ייתן $f(x,kx)=\frac{k}{k^2+1}\longrightarrow\frac{k}{1+k^2}$

יש כאן תלות בערכי של k, לכן

מובן שהגבול לא קיים.

ג $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y}{x^6+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ \text{משהו} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ – גם כאן הגבול בראשית לא קיים

* המסלול $y=kx$ ייתן 0 $\quad f(x,kx)=\frac{kx^4}{x^6+k^2x^2}=x^2\cdot\frac{k}{x^4+k^2}\longrightarrow 0$

אין ~~יש~~ כאן תלות ב-k.

* המסלול $y=kx^3$ ייתן $\quad f(x,kx^3)=\frac{kx^6}{x^6+k^2x^6}=\frac{k}{k^2+1}$

וכאן יש תלות ב-k, על כן

הגבול אינו יחיד.

גבול בכמה משתנים -

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\lim\frac{f(x,y)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{g(x,y)}\underset{\text{אם קיימים}}{=}\lim\frac{f}{x-x_0}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g}{x-x_0}}$$

הגדרה - אנו נאמר כי f רציפה ב: $x_0\in U$ אם: $\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

נאמר כי $f:U\to\mathbb{R}^m$ רציפה אם היא רציפה בכל $x_0\in U$,

עוד הגדרה - אם לכל $x_0\in U$ ולכל $(f(x_0))$ ולכל סביבה $V\subseteq\mathbb{R}^m$

של $f(x_0)$ מתקיים כי $f^{-1}[V]$ הינה סביבה של x_0 ב-$\mathbb{R}^n$.

עוד הגדרה - לכל $V\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחה, $f^{-1}[V]\subseteq U$ פתוחה. [רציפות טופולוגית]

דוגמא - הרכבת פונ' רציפות - אם g,f פונ' רציפות כך ש:

$\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^s$ אזי $g\circ f$ ~~[illegible]~~ רציפה.

כי:

$$x\in f^{-1}[g^{-1}[V]] \iff f^{-1}[g^{-1}[V]]=(g\circ f)^{-1}[V]\ni x$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$f(x)\in g^{-1}[V] \iff g(f(x))\in V \iff (g\circ f)(x)\in V$$ כנדרש

מרחבים נורמיים

<u>הגדרה</u>- מרחב נורמי הוא מרחב וקטורי E מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$

עם פונ' $\|\cdot\|: E\to[0,\infty)$ שמקיימת:

- <u>חיוביות</u> - $\|x\|=0 \iff x=\bar{0}$
- הומוגניות חיובית - $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$
- א"ש המשולש - $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$

דוגמאות

(א) $\mathbb{R}^n$ עם $\|\ \|_2$ (מקרה פרטי - $\mathbb{R}$ עם $|\cdot|$).

(ב) $\mathbb{R}^n$ עם $\|x\|_1=\sum_{j=1}^{n}|x_j|$

<u>הוכחה</u>- קל לראות את 2 התכונות הראשונות, לגבי א"ש המשולש:

$$\|x+y\|=\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|\le\sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)=\|x\|+\|y\|$$

(ג) אם H ממ"פ, $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ כי:

(1) $\|x\|=0 \iff \langle x,x\rangle=0 \underset{\text{הגדרת ממ"פ}}{\iff} x=0$

(2) $\|\alpha x\|=\sqrt{\langle\alpha x,\alpha x\rangle}=\sqrt{\alpha\langle x,\alpha x\rangle}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}\langle x,x\rangle}=|\alpha|\,\|x\|$

(3) $\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=|\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle|$

$$\underset{\text{א"ש המשולש}}{\le}|\langle x,x\rangle|+|\langle y,y\rangle|+2|\langle x,y\rangle|\underset{\text{קושי שוורץ}}{\le}\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|=(\|x\|+\|y\|)^2$$

אי שוויון קושי שוורץ בממ"פ אומר כי

$|\langle v,w\rangle|\le\|v\|\cdot\|w\|$

③ בדוק כתרגיל ~~[illegible]~~ כי $\boxed{\|x\|_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|}$ מהווה מרחב נורמי ביחס ל- $\mathbb{R}^n$

פונק' רציפות על $[a,b]$

④ תרגיל חשוב מאוד - כל רציפה: $C[a,b] = \{f:[a,b]\to \mathbb{C}\}$

מרחב נורמי של $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ עם: [מרחב ∞ מימדי]

① $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$

② $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f(x)|$

① המרחב $\ell^1(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n : \sum|x_n| < \infty\}$ עם הנורמה

$\|(x_n)\|_1 \triangleq \sum_{n\ge1}|x_n|$ [מרחב ∞ מימדי]

הוכחה- $\ell^1(\mathbb{N})$ מ"ו עם $\alpha(x_n)+(y_n) = (\alpha x_n + y_n)$ ואז

$$\sum|\alpha x_n+y_n| \underset{\text{מבחן ההשוואה בטורים}}{\le} \underbrace{\sum(|\alpha||x_n|+|y_n|)}_{\text{המונוטוניות של פעולת הסכימה}} \underset{\text{סידור מחדש של איברי הטור}}{=}$$

$$\sum|\alpha||x_n| + \sum|y_n| = |\alpha|\sum|x_n| + \sum|y_n| < \infty$$

☺ כאן גם מוכיחים את אי שוויון המשולש כיוון שמתקיים ראשית

מאלגברי ההוכחה $\Leftarrow$ $\sum|\alpha x_n+y_n| \le |\alpha|\sum|x_n|+\sum|y_n|$

* חיוביות - נובעת מכך שטור אי שלילי מתאפס אם"ם כל איבריו מתאפסים. ההומוגניות החיובית נובעת מתכונה כזו בטורים

⑤ תרגיל- להוכיח ששני המרחבים הבאים הם מרחבים נורמים:

① $\ell^2(\mathbb{N}) = \{(x_n): \sqrt{\sum|x_n|^2} < \infty\}$

② $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n): \|(x_n)\|_\infty < \infty\}$

עם הנורמה $\|(x_n)\| = \sup|x_n|$

(ח) יהיו V, W שני מרחבים נורמיים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$, או $\mathbb{C}$

$L(V,W)$ - אוסף הטרנס' הלינאריות בין V ל- W

נגדיר מרחב $B(V,W)=\{T\in L(V,W) : \sup_{\|x\|_V=1}\|Tx\|_W<\infty\}$.

יחד עם הנורמה $\|T\|=\sup_{\|x\|_V=1}\|Tx\|_W$

הוכחה - נניח כי $T,S\in B(V,W)$ אזי צ"ל כי ~~...~~

$\alpha T+S\in B(V,W)$, לכל $x\in V$, $\|x\|=1$

$$\|(\alpha T+S)(x)\|=\|\alpha(Tx)+(Sx)\|_W \underset{=}{\le} |\alpha|\cdot\|Tx\|_W+\|Sx\|_W$$

א"ש המשולש במרחב הנורמי $\|\cdot\|_W$

$$\le|\alpha|\cdot\sup_{\|y\|_V=1}\|Ty\|_W+\sup_{\|y\|_V=1}\|Sy\|_W=|\alpha|\|T\|+\|S\|<\infty$$

עכשיו שמצב נובע כי $\sup_{\|x\|=1}\|(\alpha T+S)x\|\le|\alpha|\|T\|+\|S\|$

זהו אי שוויון המשולש -

הומוגניות חיובית -

$$\sup_{\|x\|=1}\|(\alpha T)x\|=\sup\|\alpha(Tx)\|=\sup|\alpha|\cdot\|Tx\|=|\alpha|\cdot\sup\|Tx\|$$

• נניח כי $\|T\|=0$ אז לכל $\|x\|=1$ ורוצה להוכיח כי $Tx=0$.

נשים ♡ שלכל y, $Ty=\|y\|T\left(\frac{y}{\|y\|}\right)=0\cdot\|y\|=0 \Rightarrow T=0$

דוגמא לט"ל מעניינת - המרחב הוא $C^1[-1,1]$ - מרחב הפונ' הגזירות על $[-1,1]$, עם הנורמה $T(f)=f'(0)$, כאשר

$C^1[-1,1]$ עם נורמת $f_n=\frac{\sin(n^2x)}{n}$, $\|nf_n\|\equiv1$

$T\cdot(nf_n)=n^2$ - לא חסום!

$Tf_n=\frac{n^2\cos(n^2\cdot0)}{n}=n\to\infty$ ואילו $\sup|f_n|\le\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

משפט – התנאים הבאים שקולים עבור $T\in L(V,W)$:

(א) $T\in B(V,W)$ (ב) $T:V\to W$ רציף (ג) T רציף ב- $\bar{V}=0$.

הוכחה – (ב) $\Leftarrow$ (ג) – ברור

(ג) $\Leftarrow$ (ב) – $T(x_n-x_0)\to 0=T(0)$ לכן $Tx_n\to Tx_0$ וגם

$x_n\to x_0 \iff (x_n-x_0)\to 0$

(א) $\Leftarrow$ (ג) – נשים ♡ כי לכל $0\neq x\in V$

$$\|Tx\|=\Big\|\,\|x\|\,T\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\|=\|x\|_V\cdot\Big\|T\frac{x}{\|x\|}\Big\|_W\le\|x\|\,\|T\|$$

לכן $x_n\to 0$ אמ"מ $\|x_n\|\to 0 \Rightarrow \|Tx\|\to 0$

(ג) $\Leftarrow$ (א) – נניח ש- T רציפה ב- $V=0$, אבל קיים, לכל $n\in\mathbb{N}$,

$x_n\in V$ כך ש- $\|x_n\|=1$ אבל $\|Tx_n\|\geq n$, ונבחין כי

$\Big\|T\frac{x_n}{\|Tx_n\|}\Big\|=1$ אבל $\Big\|\frac{x_n}{\|Tx_n\|_W}\Big\|_V=\frac{\|x_n\|_V}{\|Tx_n\|_W}\le\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

אבל (סדר $T(x_n)\not\to$, לכן סתירה.

24/10/13

יום חמישי

הרצאה מס' 2 (מרצה מ"מ: יוני יחזקאלי)

תרגילים מעניינים שאני הכין

(1) נגדיר $C\subseteq[0,1]$ כאוסף הנקודות להן יש פיתוח עשרוני עם הספרות $\{4,7\}$, ואך ורק איתן.

(א) מצאו $int(C)$, $\bar{C}$, $int(\bar{C})$ כאשר $\bar{C}$ מסמן הסגור של C.

(הערה – באופן כללי ניתן להראות כי $int(\bar{C})\nsubseteq\overline{int\,C}$ וגם כי $\overline{int\,C}\nsubseteq int(\bar{C})$)

~~פתרון – (א) נוכיח תחילה כי C סגורה. באופן שלילי נניח כי $\bar{C}$ פתוחה.~~

~~ניקח $x\notin C$ שפיתוחו העשרוני הינו $x=0.a_1a_2a_3\ldots$, לכן קיים~~

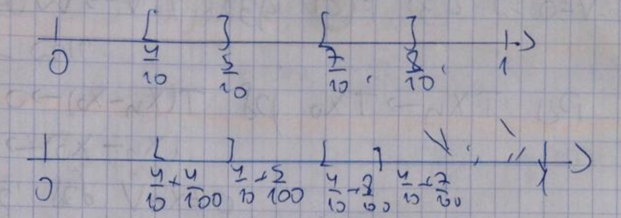
~~$j\in\mathbb{N}$ עבורו $a_j\notin\{4,7\}$, ונראה שעבור $\varepsilon=10^{-(2+j)}$ מתקיים כי~~

~~$C\cap(x-\varepsilon,x+\varepsilon)=\emptyset$, אם $y=b_1b_2\ldots$~~

פתרון- נתבונן על הקבוצה הבאות

C_1

$C_2 =$



~~כך שהתקבלנו~~ כך שהקבוצה C_j הינה כל ה-x ב-$[0,1]$ שיש להם פיתוח עשרוני שב-j המקומות הראשונים שלו משתתפים $\{4,7\}$ בלבד. נבחין כי $C=\bigcap_{j\geq 1} C_j$ על כן C סגורה כחיתוך כלשהו של סגורות, בשל כך $C=\bar{C}$.

(א) נמצא כעת את $\operatorname{int}(C)$ - נניח כי $\operatorname{int}(C)\neq\emptyset$ אזי קיים $(a,b)\subseteq C$ נגדיר $\varepsilon=b-a$ ואז גם לכל j, $(a,b)\subseteq C_j$. אולם קיים j כך ש- $\left(\frac{1}{10}\right)^j<\varepsilon$ ו-C_j אינו מכיל קטעים ארוכים מ-10^{-j}

לכן $\operatorname{int}(C)=\emptyset$ ואז גם $\operatorname{int}(\bar{C})=\emptyset$.

(ב) האם C קומפקטית? כן, מפני שהיא סגורה וחסומה

(ג) מהי עוצמת C? היא מעוצמת הרצף - ניתן לבנות פונ' $\psi: C\to 2^{\mathbb{N}}$ כך ש- $4\mapsto 0$, $7\mapsto 1$

הגדרה - שפה של קבוצה - אם X מרחב נורמי, $A\subseteq X$, נגדיר את השפה של A להיות $\boxed{\partial A=\bar{A}\setminus\operatorname{int}A}$. באופן שקול, $x\in\partial A$ אמ"מ, U סביבה של x בה יש נק' מ-A וגם נק' מחוץ ל-A (יש נק' כי ב-∂A יש נק' הדבקות ולכן יש סדרת איברים מתוך A שמתכנסת ל-x. ~~[illegible]~~ יש נק' מחוץ ל-A, כי הנקודות שם גם מחוץ ל-$\operatorname{int}(A)$)

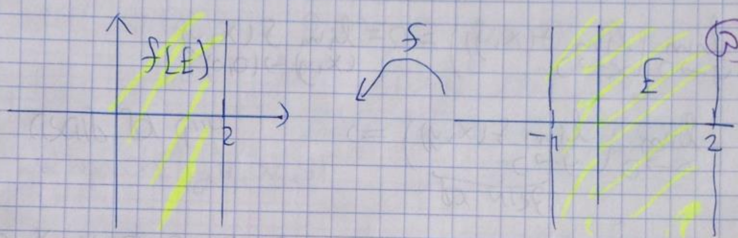
תרגיל-2- א) נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $f(x,y)=(|x|,y)$ הראו כי f רציפה.

ב) נגדיר $E=[-1,2]\times\mathbb{R}\subseteq\mathbb{R}^2$ מצאו $u\in\partial E$ כך ש- $f(u)\in \text{int}\, f[E]$

ג) אם $E\subseteq U\subseteq\mathbb{R}^k$ (פתוחה) ו- $f:U\to\mathbb{R}^m$ רציפה וחח"ע אזי $f[U\cap\partial E]\subseteq\partial f[E]$

פתרון- א) בודקים שכל אחת מפונ' הקואורדינטות רציפה:
$(x,y)\to|x|$ - נובע מא"ש המשולש, $(x,y)\to y$ רציפה כהטלה ✓

ב)



$f[E]=\{f(x,y);(x,y)\in E\}=\{(|x|,y);(x,y)\in E\}$
$=\{(|x|,y);x\in[-1,2]\}=[0,2]\times\mathbb{R}$

הערה לעצמי א- א"ש המשולש ההפוך נותן: $||x_1|-|x_2||\le|x_1-x_2|$

ג) רוצים להראות שאם $y\in f[U\cap\partial E]$ אז $y\in\partial f[E]$.

כלומר אם $x\in U\cap\partial E$ אזי $f(x)\in\partial f[E]$. (נב"ש כי $x\in U\cap\partial E$*
אבל $f(x)\notin\partial f[E]$ מכאן ש- $f(x)\in\text{int}\, f[E]$ או $f(x)\notin\overline{f[E]}$
⇐ $x\in E$ לכן ישנה $(x_n)\subset E$ סדרת איברים ב-E כך ש- $x_n\to x$
f רציפה, לכן $f(x_n)\to f(x)$ ⇐ $f(x_n)\in f(E)$ ⇐ $f(x)\in\overline{f(E)}$
⇐ אזי יש V פתוחה, כך ש- $f(x)\in V\subseteq f(E)$. f רציפה ולכן
$f^{-1}[V]$ פתוחה, $x\in f^{-1}[V]$, ע"פ שנראה כי $f^{-1}[V]\subseteq E$.
וזה מתקיים מפני שלכל $z\in V$ קיים $x_0\in E$ כך ש- $f(x_0)=z$ ו-
x_0 הוא המקור היחיד של z ב-U, מחח"ע לכן הצירוף לא יתכן.

תרגיל 3 – נגדיר פונ'
$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

(א) האם f רציפה בראשית? (ב) האם קיימים הגבולות
(1) $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$, (2) $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$

פתרון – (א) f רציפה בראשית, מפני ש- $|f(x,y)|\le |x|\to 0$

(ב) (1) $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=0=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\lim_{y\to 0} f(x,y)}_{\text{לא מוגדר}}\right)=$ הגבול לא קיים

תרגיל 4 – אם $K\subseteq X$ קומפקטית במרחב נורמי, $C\subseteq K$ סגורה
הראו ש-C קומפקטית.

פתרון – K קומפקטית במרחב נורמי, ולכן קומפקטית סדרתית.
נניח כי $(x_n)\subseteq C$ ונמצא תת סדרה שמתכנסת לגבול ב-C,
יש כזו שמתכנסת ל-$x\in X$ ומסגירות C, $x\in C$. C קומפקטית
סדרתית $\Leftarrow$ C קומפקטית.

תרגיל 5 – תהא $K\subseteq X$ קומפקטית סדרתית ותהא $(x_n)\subseteq K$. יהא $x\in X$
עם התכונה הבאה: כל תת סדרה (x_{n_k}) מתכנסת ל-x או
מתבדרת, הוכיחו כי $x\in K$ וכי $x_n\to x$.

פתרון – (א) קיימת תת סדרה מתכנסת, לכן ל-x, K סגורה ולכן
$x\in K$.

(ב) אם $x_n\not\to x$ אזי קיימת סביבה U_x של x כך שיש אינסוף x_n-ים
מחוץ לה. אזי אינסוף הנקודות הללו ~~[illegible]~~ הן סדרה ב-K,
יש להן תת סדרה מתכנסת והיא כבר חייבת להתכנס ל-x
כנתון ב-x_{n_m}, מקומפ' סדרתית $x_{n_{m_j}}\to x$ אבל יש אינסוף
איברים ~~[illegible]~~ מהסדרה שאינם
בסביבה U_x.