שבוע 15

אינטגרציה על שרשראות

הקדמה אלגברית

אם V מרחב וקטורי (נניח ממימד n מעל $\mathbb{R}$, למרות שהדיון כאן נכון לכל מרחב וקטורי מעל שדה) הגדרנו את $L^k(V)$, אוסף התבניות ה-k-לינאריות על V כאוסף ההעתקות

$$T: \underbrace{V\times V\times\cdots\times V}_{k \text{ פעמים}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

המקיימות

$$T(v_1,\dots,av_i,\dots,v_k) = a\,T(v_1,\dots,v_i,\dots,v_k)$$

$$T(v_1,\dots,v_i+v_i',\dots,v_k) = T(v_1,\dots,v_i,\dots,v_k) + T(v_1,\dots,v_i',\dots,v_k)$$

והפכנו אותו למרחב וקטורי ע"י חיבור וכפל בסקלר נקודתיים.

נגדיר כעת פעולה המקשרת בין ה-$L^k(V)$ השונים: אם $T\in L^k(V)$, $S\in L^l(V)$

נגדיר את המכפלה הטנזורית שלהם $T\otimes S\in L^{k+l}(V)$

$$(T\otimes S)(v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l}) = T(v_1,\dots,v_k)\cdot S(v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$

(זהירות! הכפל פה לא קומוטטיבי)

תרגיל: הוכיחו ש -

1. $(T_1+T_2)\otimes S = T_1\otimes S + T_2\otimes S$
2. $T\otimes(S_1+S_2) = T\otimes S_1 + T\otimes S_2$
3. $(a\cdot T)\otimes S = T\otimes(a\cdot S) = a\cdot(T\otimes S)$, $\forall a\in\mathbb{R}$
4. $(T\otimes S)\otimes R = T\otimes(S\otimes R)$

כמסקנה מתרגיל (4) נוכל לרשום $T\otimes S\otimes R$ (בלי סוגריים).

נשים לב ש- $L^1(V) = V^*$ המרחב הדואלי. למעשה אפשר באמצעות המכפלה הטנזורית לבנות את $L^k(V)$ כמכפלה טנזורית של פונקציונלים.

טענה: יהי $(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V. יהי $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ הבסיס הדואלי שלו ב-V^*, כלומר $\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}$. אז האוסף

$$(*) \qquad \varphi_{i_1}\otimes\varphi_{i_2}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k} \qquad 1\le i_1,\dots,i_k\le n$$

הוא בסיס של $L^k(V)$. (בפרט מימדו הוא n^k).

הוכחה: נשים לב ש

$$(\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k})(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) = \varphi_{i_1}(v_{j_1})\cdot\ldots\cdot\varphi_{i_k}(v_{j_k}) = \delta_{i_1,j_1}\cdots\delta_{i_k,j_k}$$

$$= \begin{cases} 1 & i_1=j_1,\dots,i_k=j_k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פרישה: יהי $T\in L^k(V)$.

נבדוק ש-
$$T = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} T(v_{i_1},\dots,v_{i_k})\,\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}$$

(כלומר, $(*)$ קבוצה פורשת). ויהיו $w_1,\dots,w_k$ כלשהם נרשום $w_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$

אזי:

$$T(w_1,\dots,w_k) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{1,j_1}\cdots a_{k,j_k}\,T(v_{i_1},\dots,v_{i_k}) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} T(v_{i_1},\dots,v_{i_k})\,\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}(w_1,\dots,w_k)$$

אי-תלות: נניח שצירוף לינארי של איברי (*) נותן את התבנית האפס

$$\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} b_{i_1,\dots,i_k}\, \varphi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_k} = 0$$

נציב בזוג האיברים $(v_{j_1},\dots,v_{j_k})$ ונקבל $b_{j_1\dots j_k}=0$ $\square$

הגדרה: אם $f:V\to W$ העתקה לינארית היא מגדירה העתקה $L^k(W)\to L^k(V)$

$$f^*T(v_1,\dots,v_k) = T(f(v_1),\dots,f(v_k))$$

(משיכה f לאחור של תבנית)

תרגיל: הראו ש- $f^*(T\otimes S) = f^*T\otimes f^*S$.

הגדרה: תבנית $\varphi\in L^k(V)$ נקראת אנטי-סימטרית (alternating) אם

$$\varphi(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k) = -\varphi(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k)$$

$$\forall v_1,\dots,v_k\in V$$

נסמן ב- $\Lambda^k(V)$ את תת-המרחב של $L^k(V)$ הכולל את התבניות האנטי-סימטריות.

(מיד נראה שזהו אכן תת-מרחב)

דוגמא: $\det\in\Lambda^n(V)$.

לכל $T \in L^k(V)$ אפשר להתאים תבנית אנטי-סימטרית

$$alt(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn(\sigma) \; T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

חבורת התמורות של k איברים

משפט:

① לכל $T \in L^k(V)$, $alt(T) \in \Lambda^k(V)$.

② ההעתקה $alt : L^k(V) \to \Lambda^k(V)$ היא הטלה.
(כלומר, alt לינארית ומקיימת $alt^2 = alt$)

הוכחה: ① תהא $(i,j) \in S_k$ התמורה שמחליפה את i עם j ומשאירה את השאר.
נזכר ש- $sgn\sigma$ כפלית, כלומר $sgn(\sigma \circ \tau) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\tau)$. ולכיוון שלחילוף סימן $-$
נקבל $sgn(\sigma') = -sgn(\sigma)$ אם $\sigma' = \sigma \circ (i,j)$. אז

$$alt(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn\sigma \cdot T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} sgn\sigma \cdot T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(k)})$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma' \in S_k} -sgn\,\sigma' \cdot T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(k)})$$

$$= -alt(T)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

② אם $\omega\in\Lambda^k(V)$ ו- $\sigma=(i,j)$ אז

$$(*)\quad \omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(i)},\dots,v_{\sigma(j)},\dots,v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k)$$

(כי $\omega(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_k) = (-1)\cdot\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_k)$)

מאחר וכל תמורה היא כפל של חילופים, ומכיוון ש- sgn כפלית, נקבל ש-(*) מתקיימת לכל $\sigma\in S_k$. ולכן

$$alt(\omega) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})$$

$$= \frac{1}{k!}\underbrace{\sum_{\sigma\in S_k}}_{k!\text{ מחוברים}}\underbrace{\operatorname{sgn}\sigma\cdot\operatorname{sgn}\sigma}_{1}\;\underbrace{\omega(v_1,\dots,v_k)}_{\text{לא תלוי ב-}\sigma} = \omega(v_1,\dots,v_k)$$

ולכן alt היא הזהות על תמונתה. □

כעת, נקשר בין כל ה-$\Lambda^k(V)$, כפי שקישרנו ע"י $\otimes$ בין כל ה-$L^k(V)$.

הגדרה: אם $\omega\in\Lambda^k(V)\subset L^k(V)$ ו- $\eta\in\Lambda^l(V)\subset L^l(V)$, $\omega\otimes\eta\in L^{k+l}(V)$ אבל בד"כ לא שייך ל-$\Lambda^{k+l}(V)$. אז נגדיר כזאת:

$$\omega\wedge\eta := \frac{(k+l)!}{k!\,l!}\,alt(\omega\otimes\eta)$$

"wedge product"

תכונות:

① $(\omega_1+\omega_2)\wedge\eta = \omega_1\wedge\eta + \omega_2\wedge\eta$

② $\omega\wedge(\eta_1+\eta_2) = \omega\wedge\eta_1 + \omega\wedge\eta_2$

③ $(a\omega)\wedge\eta = \omega\wedge(a\eta) = a(\omega\wedge\eta)$

④ $\omega\wedge\eta = (-1)^{kl}\,\eta\wedge\omega$

⑤ $f^*(\omega\wedge\eta) = f^*\omega\wedge f^*\eta$

למשל, נוכיח את ④ עבור $k=l=1$

$$(\omega\wedge\eta)(v_1,v_2) = \frac{1}{2!}\left(\omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1)\right)$$

$$= -\frac{1}{2!}\left(\eta(v_1)\omega(v_2) - \eta(v_2)\omega(v_1)\right) = -(\eta\wedge\omega)(v_1,v_2)$$

ולכן $\omega\wedge\eta = (-1)^{1\cdot 1}\,\eta\wedge\omega$

טענה

(1) אם $R\in L^k(V)$ כך ש- $alt(R)=0$ ו- $T\in L^l(V)$ אז $alt(T\otimes R) = alt(R\otimes T) = 0$.

(2) אם $\omega\in\Lambda^k(V),\ \eta\in\Lambda^l(V),\ \theta\in\Lambda^m(V)$ אז

(א) $alt(alt(\omega\otimes\eta)\otimes\theta) = alt(\omega\otimes\eta\otimes\theta) = alt(\omega\otimes alt(\eta\otimes\theta))$

(ב) $(\omega\wedge\eta)\wedge\theta = \omega\wedge(\eta\wedge\theta) = \dfrac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}\,alt(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$

הוכחה

(1) יהי $G \le S_{k+l}$ תת החבורה של כל התמורות שמייצבות את $k+1, \dots, k+l$.

יהי X קבוצת נציגים של הקוסטים של G ב- S_{k+l}.

אז $S_{k+l} = \coprod_{\tau} G\cdot\tau$ (איחוד זר של קוסטים). ולכן ניתן לרשום

$$\mathrm{alt}(R\otimes T) = \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot R(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})\cdot T(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

$$= \frac{1}{(k+l)!}\sum_{\tau\in X} \underbrace{\sum_{g\in G\tau} \mathrm{sgn}(g)\, R(v_{g(1)},\dots,v_{g(k)})\, T(v_{g(k+1)},\dots,v_{g(k+l)})}_{m_\tau}$$

נראה שלכל $\tau\in X$, $m_\tau = 0$.

למשל, עבור $\tau=1$:

$$m_1 = \Big[\underbrace{\sum_{\sigma\in G} \mathrm{sgn}(\sigma)\, R(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)})}_{=\,\mathrm{alt}(R)(v_1,\dots,v_k)\,=\,0}\Big]\, T(v_{k+1},\dots,v_{k+l})$$

באופן כללי, נסמן $\omega_1 = v_{\tau(1)},\ \omega_2 = v_{\tau(2)},\ \dots,\ \omega_{k+l} = v_{\tau(k+l)}$. אז

$$\sum_{\sigma\tau\in G\tau} \mathrm{sgn}(\sigma\tau)\, R(v_{\sigma(\tau(1))},\dots,v_{\sigma(\tau(k))})\, T(v_{\sigma(\tau(k+1))},\dots,v_{\sigma(\tau(k+l))})$$

$$\mathrm{sgn}(\tau)\Big(\underbrace{\sum_{\sigma\in G} \mathrm{sgn}(\sigma)\, R(\omega_{\sigma(1)},\dots,\omega_{\sigma(k)})}_{\mathrm{alt}(R)(\omega_1,\dots,\omega_k)\,=\,0}\Big)\, T(\underbrace{\omega_{\sigma(k+1)}}_{=\,\omega_{k+1}},\dots,\underbrace{\omega_{\sigma(k+l)}}_{=\,\omega_{k+l}})$$

(2) (א) כיוון ש- alt הטלה, מתקיים

$$alt\Big(\underbrace{alt(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta}_{R}\Big)=0$$

לכן מ- (1):

$$0=alt(\omega\otimes R)=alt\Big(\omega\otimes\big(alt(\eta\otimes\theta)-\eta\otimes\theta\big)\Big)$$

$$=alt\big(\omega\otimes alt(\eta\otimes\theta)\big)-alt(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$$

(ב)

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\,alt\big((\omega\wedge\eta)\otimes\theta\big)$$

$$=\frac{(k+l+m)!}{\cancel{(k+l)}!\,m!}\,\frac{\cancel{(k+l)}!}{k!\,l!}\,alt(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$$

$$\|$$

$$\omega\wedge(\eta\wedge\theta)=\frac{(k+l+m)!}{k!\,\cancel{(l+m)}!}\,\frac{\cancel{(l+m)}!}{l!\,m!}\,alt(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$$

$\square$

משפט

יהי $(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V ו- $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ הבסיס הדואלי.

אז הצירופים $\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}$ $\quad 1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n$

הינם בסיס של $\Lambda^k(V)$, בפרט, $\dim\Lambda^k(V)=\binom{n}{k}$.

הוכחה

ראינו כבר ש- $alt: L^k(V) \to \Lambda^k(V)$ על ולכן (יחד עם נוסחת ההחלפה $\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega$)

זו קבוצה פורשת.

נניח ש- $0 = \sum_i b_{i_1,\dots,i_k} \varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}$

נפעיל על סדרה $(v_{j_1},\dots,v_{j_k})$ ונקבל שכל אחד מהמקדמים מתאפס. □

בפרט $1 = \dim \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ והוא נפרש ע"י $\det(\cdot)$.

משפט

יהי $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V ויהי $\omega\in\Lambda^n(V)$. אם $u_1,\dots,u_n\in V$ ומקיימים

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \qquad i=1,\dots,n$$

אז
$$\omega(u_1,\dots,u_n) = \det(a_{ij})\,\omega(v_1,\dots,v_n)$$

הוכחה

נגדיר $\eta\in\Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ ע"י $\eta\left(\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{1n}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}a_{n1}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}\right) := \omega\left(\sum_j a_{1j}v_j,\dots,\sum_j a_{nj}v_j\right)$

בהכרח יש $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש- $\eta=\lambda\cdot\det$ ולאחר נציב $(a_{ij})=I$ ונקבל

$$\eta(e_1,\dots,e_n) = \lambda = \omega(v_1,\dots,v_n)$$ □

דוגמא:

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Span}\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$$

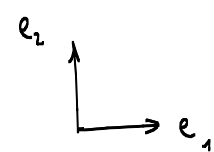
$$\Lambda^2(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Span}\{e_1^*\wedge e_2^*,\ e_2^*\wedge e_3^*,\ e_1^*\wedge e_3^*\}$$

$$\Lambda^3(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Span}\{e_1^*\wedge e_2^*\wedge e_3^*\}$$

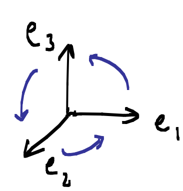
$$\Lambda^k(\mathbb{R}^3) = 0 \qquad k\geq 4$$

המשפט האחרון מראה שבחירה של $0\neq\omega\in\Lambda^n(V)$ מאפשרת את חלוקת הבסיסים של V לשתי קבוצות לפי $\omega(v_1,\dots,v_n)>0$ או $\omega(v_1,\dots,v_n)<0$. $(v_1,\dots,v_n)$ ו-$(u_1,\dots,u_n)$ שייכים לאותה קבוצה אמ״ם ההעתקה A שמעבירה אחד לשני מקיימת $\det A>0$. התנאי האחרון לא תלוי ב-ω.

כל קבוצה כזו נקראת אוריינטציה של V. נסמן את האוריינטציה של $(v_1,\dots,v_n)$ ע״י $[v_1,\dots,v_n]$ ו-$-[v_1,\dots,v_n]$ את השניה.



ב-$\mathbb{R}^2$ (e_1,e_2) ו-(e_2,e_1) בעלי אוריינטציה שונה.



ב-$\mathbb{R}^3$ (e_1,e_2,e_3), (e_3,e_1,e_2) ו-(e_2,e_3,e_1) בעלי אותה אוריינטציה.

ב-$\mathbb{R}^n$ נסמן $[e_1,e_2,\dots,e_n]$ האוריינטציה הסטנדרטית.

למעשה כללי: V ממימד n אין "בסיס סטנדרטי", ולכן אין נפח לדבר שמוגדר באיכה על $\omega\in\Lambda^n(V)$ ספציפי. אבל, נניח שיש על V מכפלה פנימית $\langle , \rangle$.

אז כל שני בסיסים אורתונורמליים $(v_1,\dots,v_n)$ ו- $(u_1,\dots,u_n)$ נבדלים ע"י העתקה אורתוגונלית: אם $u_i=\sum a_{ij}v_j$ אז

$$\delta_{ij}=\langle u_i,u_j\rangle=\Big\langle\sum_k a_{ik}v_k,\ \sum_l a_{jl}v_l\Big\rangle=\sum_{k,l}a_{ik}a_{jl}\underbrace{\langle v_k,v_l\rangle}_{\delta_{kl}}=\sum_k a_{ik}a_{jk}$$

כלומר, $I=AA^t$ ולכן $\pm1=\det A$.

ולכן, אם $\omega\in\Lambda^n(V)$ מקיים $\omega(v_1,\dots,v_n)=\pm1$ אז גם $\omega(u_1,\dots,u_n)=\pm1$.

אם μ אוריינטציה של V אז יש ω יחידה כך ש- $\omega(v_1,\dots,v_n)=1$ אם $\mu=[v_1,\dots,v_n]$. ω כזו נקרא תבנית נפח של V (הנקבעת ע"י μ, $\langle , \rangle$).

מכפלה צלב (cross product)

נניח ש- $v_1,\dots,v_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ קבועים. נגדיר $\varphi\in\Lambda^1(\mathbb{R}^n)=(\mathbb{R}^n)^*$ ע"י

$$\varphi(u)=\det(v_1,\dots,v_{n-1},u)$$

יש וקטור יחיד $z\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $\varphi(u)=\langle u,z\rangle$ ומסמנים

$$z=v_1\times\cdots\times v_{n-1}$$

הוא נקרא ה- cross product של $v_1,\dots,v_{n-1}$.

מיידי מההגדרה שמתקיים

- $v_{\sigma(1)} \times \cdots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn}\sigma \; v_1 \times \cdots \times v_{n-1}$
- $v_1 \times \cdots \times a v_i \times \cdots \times v_{n-1} = a(v_1 \times \cdots \times v_{n-1})$
- $v_1 \times \cdots \times (v_i + v_i') \times \cdots \times v_{n-1} = v_1 \times \cdots \times v_i \times \cdots \times v_{n-1} + v_1 \times \cdots \times v_i' \times \cdots \times v_{n-1}$

תרגיל

יהי $e_1,\dots,e_n$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ ו-$\varphi_1,\dots,\varphi_n$ הבסיס הדואלי.

הוכיחו ש- $(\varphi_{i_1} \wedge \cdots \wedge \varphi_{i_k})(e_{i_1},\dots,e_{i_k}) = 1$.

כאן נכנס הנרמול בהגדרת $\wedge$ - מה היה קורה ללא הנרמול $\frac{(k+l)!}{k!\,l!}$?

תרגיל

תהי $c:[0,1] \to (\mathbb{R}^n)^n$ מסילה רציפה כך ש- $(c_1(t),\dots,c_n(t))$ בסיס של $\mathbb{R}^n$ לכל $0 \le t \le 1$. הוכיחו ש- $[c_1(0),\dots,c_n(0)] = [c_1(1),\dots,c_n(1)]$.

תרגיל

הוכיחו שאם $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ ו- $u = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ אז

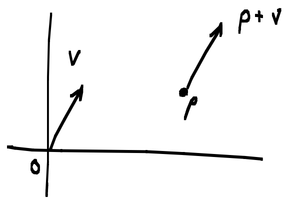
$$v \times u = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \text{“}\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\text{”}$$

שדות וקטוריים ותבניות

לכל $p\in\mathbb{R}^n$ נסמן ב- $\mathbb{R}^n_p = \{(p,v) \mid v\in\mathbb{R}^n\}$. זהו עותק של $\mathbb{R}^n$ "שיושב" בנקודה p.

$$\begin{cases} (p,v_1)+(p,v_2) := (p, v_1+v_2) \\ a\cdot(p,v) := (p, av) \end{cases}$$

לפעמים נסמן v_p במקום (p,v).



את כל המבנים של $\mathbb{R}^n$ נעביר אל $\mathbb{R}^n_p$

למשל $((e_1)_p, \dots, (e_n)_p)$ יהיה הבסיס הסטנדרטי שלו

$\langle , \rangle_p$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית וכו'.

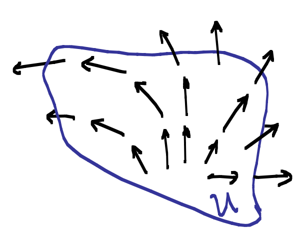
שדה וקטורי על $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה הוא בחירה של וקטור v_p לכל $p\in U$.

כלומר זו פונקציה $F: U \to \dot{\bigcup_{p\in U}} \mathbb{R}^n_{(p)}$

$$F(p) = F_1(p)(e_1)_p + \dots + F_n(p)(e_n)_p$$

השדה הוקטורי נקרא רציף/דיפרנציאבילי/חלק אם כל $F_i: U\to\mathbb{R}$ - ה כאלה.

הנה דוגמא ציורית:



פעולות על שדות וקטוריים מוגדרים נקודתית:

$$(F+G)(p) = F(p)+G(p)$$

$$\langle F, G\rangle (p) = \langle F(p), G(p)\rangle$$

$$(f\cdot F)(p) = f(p)\cdot F(p) \qquad (f: \mathcal{U}\to \mathbb{R})$$

$$F^{(1)}\times \cdots \times F^{(n-1)}(p) = F^{(1)}(p)\times\cdots\times F^{(n-1)}(p) \qquad (F^{(i)} \text{ שדות וקטוריים})$$

נסמן $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ אז

הדיברגנץ של F

$$\operatorname{div} F = \langle \nabla, F\rangle = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

הרוטור של F או ה-curl של F

$$\nabla\times F\,(p) = \text{"}\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}\text{"} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$