שבוע 12

תבניות דיפרנציאליות ונגזרה חיצונית

אם $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה הגדרנו את אוסף ה-k-תבניות הדיפרנציאליות על U

(נזכיר: הן אנטיסימטריות ולינאריות) והגדרנו העתקה d (= נגזרה חיצונית) ביניהן

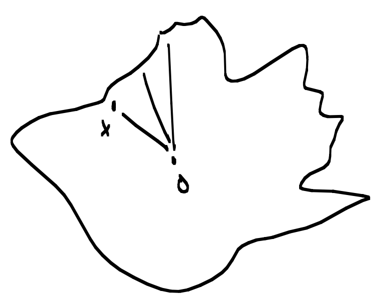
$$\underbrace{\Omega^0(U)}_{\text{פונקציות}} \xrightarrow{d} \underbrace{\Omega^1(U)}_{\text{1-תבניות}} \xrightarrow{d} \Omega^2(U) \to \cdots \to \Omega^n(U)$$

כאשר אם $\omega = \sum \omega_I\, dx_I \in \Omega^k(U)$ אז $d\omega = \sum d\omega_I \wedge dx_I \in \Omega^{k+1}(U)$.

ראינו ש- $d \circ d = 0$, כלומר $\underbrace{\mathrm{Im}\, d}_{\text{תבניות מדויקות}} \subseteq \underbrace{\ker d}_{\text{תבניות סגורות}}$

וראינו דוגמה לתבנית סגורה לא מדויקת (זה קרה כי בתחום U היה "חור").

מיד נראה שאם U קבוצה כוכבית



אז יש העתקה בכיוון ההפוך $\Omega^k(U) \underset{I}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \Omega^{k+1}(U)$ שתראה לנו שכל תבנית סגורה

היא מדויקת.

תהא $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \, dx_i$ 1-תבנית על $\mathbb{R}^n$ ונניח ש- $\omega = df$, ובלי פגיעה בכלליות $f(0)=0$.

אז

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\, dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i \, dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \omega_i(tx) \, x_i \, dt =: I(\omega)$$

תרגיל: הוכיחו שאם $d\omega = 0$ אז $\omega = d(I(\omega))$. בפרט ω מדויקת.

משפט (הלמה של פואנקרה): תהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה כוכבית ומרכזה ב-0.

אז כל תבנית סגורה על U מדויקת.

הוכחה: נבנה $\Omega^{k-1}(U) \underset{I}{\overset{d}{\rightleftarrows}} \Omega^k(U)$ כך ש- $I(0)=0$! -

$$(*) \qquad d(I(\omega)) + I(d(\omega)) = \omega$$

בפרט, אם $d\omega = 0$ נקבל $\omega = d(I(\omega))$.

עבור $\omega = f \cdot dx_I \in \Omega^k(U)$ נגדיר

$$I(\omega)(x) = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt \right) x_{i_\alpha} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx_{i_\alpha}} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

ונניח לינאריות, נוכיח את (*):

$$d(I\omega) = \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1}\, d\left[\left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt\right)\cdot x_{i_\alpha}\right] dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1}\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(\int_0^1 t^{k-1}\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, t\, dt\right) x_{i_\alpha}\cdot dx_j}_{} + \left(\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt\right) dx_{i_\alpha}\right] dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

$$I(d\omega) = I\left(df\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right) = I\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\right)$$

$$\underset{j=i_0}{=} \sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^{\alpha}\left(\int_0^1 t^{k}\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt\right) x_{i_\alpha}\, dx_j\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\int_0^1 t^{k}\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt\;\; x_j\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

$$+ (-1)\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^{\alpha-1}\left(\int_0^1 t^{k}\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt\right) x_{i_\alpha}\, dx_j\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_{i_\alpha}}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}}_{}$$

מכאן

$$d(I(\omega)) + I(d(\omega)) = \left(k\int_0^1 t^{k-1} f(tx)\, dt + \sum_{j=1}^{n}\int_0^1 t^{k} x_j\frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\, dt\right) dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(t^k f(tx)\right) dt\;\; dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k} = \omega$$

$\square$

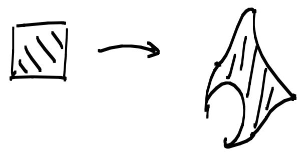
הכנה גיאומטרית

k - קוביה סינגולרית ב- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא העתקה רציפה $c:[0,1]^k \to A$

0- קוביה $\{0\} \to A$

1- קוביה = מסילה $[0,1] \to A$

2- קוביה



$\vdots$

ה- n - קוביה הסטנדרטית $I^n:[0,1]^n \to \mathbb{R}^n$, $I^n(x)=x$. (כאן $n=k$)

k - שרשרת היא סכום פורמלי של k - קוביות סינגולריות עם מקדמים שלמים

$$2\cdot c_1 + (-8)c_2 + 3\cdot c_3$$

לכל k-שרשרת c ב- A נגדיר את <u>השפה</u> שלה ∂c.

נתחיל עם הגדרת השפה של $I^k:[0,1]^k \to \mathbb{R}^k$, $I^k(x)=x$.

נסמן

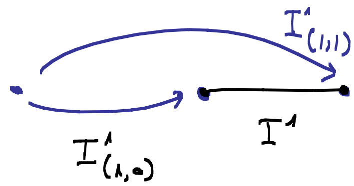
$I^k_{(i,1)} , I^k_{(i,0)} : [0,1]^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ $\qquad i=1,\dots,k$

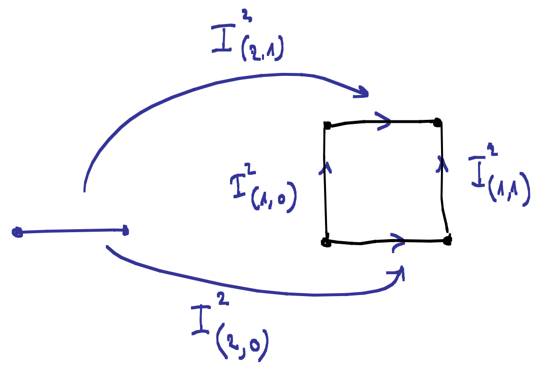
"הפאה ה- $(i,0)$ של I^k" $\qquad I^k_{(i,0)}(x) = (x_1,x_2,\dots,x_{i-1},0,x_i,\dots,x_{k-1})$

"הפאה ה- $(i,1)$ של I^k" $\qquad I^k_{(i,1)}(x) = (x_1,x_2,\dots,x_{i-1},1,x_i,\dots,x_{k-1})$

נגדיר:
$$\partial I^k := \sum_{i=1} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^k_{(i,\alpha)}$$

דוגמאות:
$$\partial I^1 = \underset{0 \mapsto 1}{\{0\} \to [0,1]} - \underset{0 \mapsto 0}{\{0\} \to [0,1]}$$





$$\partial I^2 = I^2_{(2,0)} + I^2_{(1,1)} - I^2_{(2,1)} - I^2_{(1,0)}$$

אם $c:[0,1]^k \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ קוביה-k סינגולרית נגדיר

$$c_{(i,\alpha)} := c \circ I^n_{(i,\alpha)} \qquad (\alpha = 0,1)$$

אז
$$\partial c := \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$$

ובאופן טבעי ל-k-שרשראות: $\partial\left(\sum a_i c_i\right) := \sum a_i \partial c_i$.

משפט: אם c k-שרשרת אז $\partial(\partial c) = 0$. (הוכחה - תרגיל).

המשפט היסודי של החדו"א / משפט סטוקס

נזכיר נעסוק ב-k-קוביות דיפרנציאביליות

$$\begin{array}{ccc} c:[0,1]^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \cap\!| & & \| \\ \tilde{c}: W & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \end{array}$$

פתוחה ב-$\mathbb{R}^k$

כלומר, c היא צמצום של $\tilde{c}$, כאשר $\tilde{c}$ דיפרנציאבילית ומוגדרת על פתוחה שמכילה את $[0,1]^k$.

אם ω k-תבנית על $[0,1]^k$ אז $\omega = f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k$ לפונקציה f יחידה

נגדיר:
$$\int_{[0,1]^k}\omega := \int_{[0,1]^k} f$$

"אינטגרל של k-תבנית"

אינטגרל רימן הרגיל

אם ω k-תבנית על $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ ו- $c:[0,1]^k\to\mathcal{U}$ קוביה דיפרנציאבילית, נגדיר

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega$$

בפרט זה מסכים עם ההגדרה הקודמת:

$$\int_{I^k} f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k = \int_{[0,1]^k}(I^k)^*\left(f\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_k\right) = \int_{[0,1]^k} f(x_1,\dots,x_k)\,dx_1\cdots dx_k$$

עבור $k=0$: אם $c:\{0\}\to \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ 0-קוביה ב-$\mathcal{U}$ נגדיר

$$\int_c \omega = \omega(c(0)) \qquad \omega\in\Omega^0(\mathcal{U})$$

ואם $c=\sum_i \alpha_i c_i$ $(\alpha_i\in\mathbb{Z})$ היא k-שרשרת, אז $\int_c \omega := \sum_i a_i \int_{c_i}\omega$.

משפט (Stokes):

תהא $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. תהא $\omega\in\Omega^{k-1}(\mathcal{U})$ ותהא c k-שרשרת ב-$\mathcal{U}$. אז

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c}\omega$$

דוגמה: נניח ש- $n=k=1$. $c:[0,1]\to[a,b]\subseteq\mathbb{R}$

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]} d(c^*\omega) = \int_{[0,1]} d(\omega\circ c) = \int_{[0,1]} d\omega_c\cdot dc = \int_0^1 \omega'(c(t))\,c'(t)\,dt$$

$$\parallel$$

$$\int_{\partial c}\omega = \int_{c_1-c_2}\omega = \int_{c_1}\omega - \int_{c_2}\omega = \omega(c_1(0)) - \omega(c_2(0)) = \omega(b)-\omega(a) = \int_a^b \omega'(x)\,dx$$

$$c_1:\{0\}\to\{b\}$$
$$c_2:\{0\}\to\{a\}$$

הוכחה

נניח תחילה ש- $c = I^k$, ו- ω היא $(k-1)$-תבנית על $[0,1]^k$.

אז $\omega = \sum_{i=1}^{k} f_i \, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots dx_k$ ומספיק (מליניאריות) להוכיח את המשפט למחובר ספציפי

למה: עבור $1\le i,j\le k$ ו- $\alpha\in\{0,1\}$ מתקיים:

$$\int_{[0,1]^{k-1}} {I^k_{(j,\alpha)}}^* \left(f\, dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k\right) = \begin{cases} 0 & i\neq j \\ \int_{[0,1]^k} f(x_1,\dots,\alpha,\dots,x_k)\, dx_1\cdots dx_k & i=j \end{cases}$$

הוכחת הלמה:

תחילה נבין מקרוב בהעתקה $I^k_{j,\alpha} = h|_{[0,1]^{k-1}}$, כלומר $I^k_{j,\alpha}$ היא צמצום של

$$h: \mathbb{R}^{k-1} \longrightarrow \mathbb{R}^k$$
$$(x_1,\dots,x_{k-1}) \mapsto (x_1,\dots,x_{j-1},\alpha,x_j,\dots,x_k)$$

$$h^*: \Omega^1(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^{k-1})$$

(נסמן בשונות את הבסיס ב- dy_i כדי שיהיה קל לעקוב) $dy_1,\dots,dy_k$ $\qquad$ $dx_1,\dots,dx_{k-1}$

אז

$$h^*(dy_r) = \sum_{l=1}^{k-1} \frac{\partial h}{\partial x_l} dx_l = \begin{cases} dx_r & r<j \\ 0 & r=j \\ dx_{r-1} & r>j \end{cases}$$

$r=1,\dots,k$

לכן

$$\int_{[0,1]^{k-1}} h^*\left(f\, dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \cdots \wedge dy_k\right)$$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} (f \circ h) \cdot h^*\left(dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \cdots \wedge dy_k\right)$$

$h^*(f\omega) = (f \circ h)\, h^*\omega$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_k)\; h^*(dy_1) \wedge \cdots \wedge \widehat{h^*(dy_i)} \wedge \cdots \wedge h^*(dy_k)$$

$h^*(\omega \wedge \eta) = h^*\omega \wedge h^*\eta$

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_k)\; dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{0} \wedge dx_j \wedge \cdots \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{\widehat{dx_i}} \wedge \cdots \wedge dx_{k-1}$$

$$h^*(dy_r) = \begin{cases} dx_r & r < j \\ 0 & r = j \\ dx_{r-1} & r > j \end{cases}$$

לכן, אם $i \neq j$ נקבל $= 0$.

אם $i = j$ מקבלים

$$= \int_{[0,1]^{k-1}} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_{k-1})\, dx_1 \cdots dx_{k-1}$$

$$= \int_{[0,1]} dx_k \left(x_k \text{ לא תלוי ב} \right) = \int_{[0,1]^k} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_{k-1})\, dx_1 \cdots dx_k$$

$\square$

לכן

$$\int_{\partial I^k} f\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{j+\alpha}\int_{[0,1]^{k-1}} {I^k_{(j,\alpha)}}^*\left(f\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k\right)$$

$$=(-1)^{i+1}\int_{[0,1]^k} f(x_1,\dots,1,\dots,x_k)\,dx_1\cdots dx_k+(-1)^i\int_{[0,1]^k} f(x_1,\dots,0,\dots,x_k)\,dx_1\cdots dx_k$$

אזי ש:

$$\int_{I^k} d\left(f\,dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\cdots\wedge dx_k\right)=\int_{[0,1]^k} df\wedge dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_k$$

$$=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_i\wedge\cdots\wedge dx_k=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

פוביני

$$=(-1)^{i-1}\int_0^1\cdots\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\right)dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_k$$

מהמשפט היסודי של
החדו"א עבור $n=1$

$$=(-1)^{i-1}\int_0^1\cdots\int_0^1\left[f(x_1,\dots,1,\dots,x_k)-f(x_1,\dots,0,\dots,x_k)\right]dx_1\cdots\widehat{dx_i}\cdots dx_k$$

$$=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k} f(x_1,\dots,1,\dots,x_k)\,dx_1\cdots dx_k+(-1)^i\int_{[0,1]^k} f(x_1,\dots,0,\dots,x_k)\,dx_1\cdots dx_k$$

לכן

$$\int_{I^k} d\omega=\int_{\partial I^k}\omega$$

אם $c:[0,1]^k \to \mathbb{R}^n$ k-קוביה סינגולרית אז

$$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*(\omega)) \underset{\substack{\text{לפי} \\ \text{מה} \\ \text{שהוכחנו}}}{=} \int_{\partial[0,1]^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega$$

לבסוף, כיוון שהכל כאן לינארי, הטענה נכונה גם ל- k-שרשראות $\sum \alpha_i c_i$ ∎