שבוע 2

חשבון אינפיניטסימלי 3

אינפי 3 זה מה שנוצר כשמכניסים לבלנדר את אלגברה 1 ו-2 ואת אינפי 1 ו-2. זהו גם המפתח להבנת גיאומטריה דיפרנציאלית שבאמצעותה ניתן לתאר את חוקי המכניקה הקלאסית והיחסותית, חשמל ומגנטיות, ועוד.

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$

הנושא הראשון בו נעסוק הוא פונקציות רציפות $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

נסמן ב-$\langle \cdot , \cdot \rangle$ את המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$: $\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

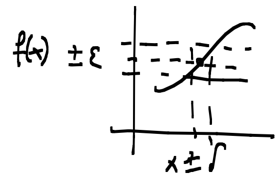
המכפלה מגדירה נורמה על $\mathbb{R}^n$ ע"י $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2} = \langle x,x \rangle$ לכל $x \in \mathbb{R}^n$.

נורמה על מרחב וקטורי ממשי V היא פונקציה $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת

1. $\|x\| > 0$ אמ"ם $x \neq 0$. (חיוביות)
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x \in V$. (הומוגניות)
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x,y \in V$. (אי שוויון המשולש)

באמצעות הנורמה אפשר להגדיר מטריקה $d(x,y) := \|x-y\|$ ולדבר על רציפות של פונקציות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$. בקורסי האינפי הקודמים דיברנו על פונקציה רציפה מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$ כשמתן הגדרה מוכרה עם הרבה כמתים והאותיות ε ו-δ

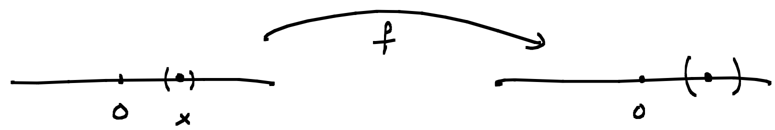
נזכיר ציור כזה:



(*)

ראשית, כיוון שאיננו יכולים לצייר גרף של פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ באופן כללי,

נצטרך לשכתב את (*) ולהמיר אותו ל-

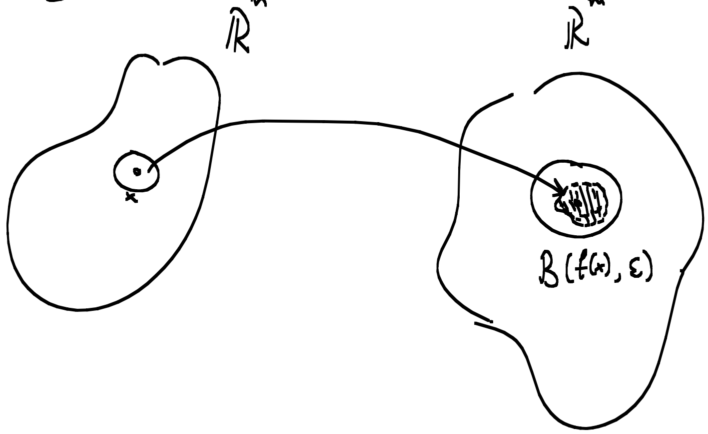


f רציפה ב-x אם לכל סביבה של $f(x)$ יש סביבה של x שמועתקת לתוכה.

וכעת $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ רציפה ב-x אם לכל סביבה של $f(x)$ יש סביבה של x

שמועתקת לתוכה.

כדאי לזכור!



אם $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה אז נגדיר $C(A,\mathbb{R}^m)$ = פונ' רציפות בכל $x\in A$

תרגיל: אם $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית אז T רציפה בכל $\mathbb{R}^n$.

נסמן את אוסף ההעתקות הלינאריות ממרחב V למרחב W ע"י $\mathrm{Hom}(V,W)$.

הגדרה: תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה לינארית. הנורמה של T היא

$$\|T\| := \max\{\|T(x)\| \mid x\in\mathbb{R}^n,\ \|x\|=1\}$$
$$= \max_{0\neq x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$$

הערה: המקסימום אכן מתקבל כי ספירת היחידה $S^{n-1}:=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}$ קומפקטית ו-T רציפה.

תרגיל: ① $\|\cdot\|: Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ אכן נורמה.

② אם $T\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $S\in Hom(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$ אז $\|S\circ T\|\le\|S\|\|T\|$.

תזכורת: בהינתן B בסיס של $\mathbb{R}^n$ ו-C בסיס של $\mathbb{R}^m$ יש איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים

$$Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\simeq M_{m\times n}(\mathbb{R})$$
$$T\longmapsto [T]^B_C$$

יש לנו גם נורמות על שני המרחבים: $\|T\|$ כפי שהגדרנו למעלה ל-$T\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

והנורמה האוקלידית על $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, כלומר $\|(a_{ij})\| = \sqrt{\sum a_{ij}^2}$ ל-$(a_{ij})\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

הטענה הבאה מראה שהאיזומורפיזם $[\cdot]^B_C$ שומר גם על תכונות טופולוגיות.

נוכיח אותה לבסיסים אורתונורמליים.

טענה: נבחר בסיסים אורתונורמליים $B=(v_1,\dots,v_n)$ של $\mathbb{R}^n$ ו- $C=(u_1,\dots,u_m)$ של $\mathbb{R}^m$.

לכל $T \in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ תהי

$$[T]^B_C = \begin{bmatrix} a_{11}(T) & \cdots & a_{1n}(T) \\ \vdots & & \\ a_{m1}(T) & \cdots & a_{mn}(T) \end{bmatrix}$$

המטריצה המייצגת של T ביחס לבסיסים B ו- C, כלומר $T(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij}(T)\, u_i$

אז עבור סדרה $\{T_k\}_{k=1}^\infty \subseteq Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ מתקיים

$T_k \xrightarrow[k\to\infty]{} T$ אם"ם $a_{ij}(T_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} a_{ij}(T)$ $\quad \forall\, \begin{matrix} i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n \end{matrix}$

במילים - התכנסות סדרת העתקות שקולה להתכנסות סימולטנית של איברי המטריצות המייצגות

הוכחה: נסמן ב- E_{ij} את ההעתקה

$$E_{ij}(v_k) = \begin{cases} u_i & k=j \text{ אם} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז לכל $S \in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ מתקיים $S = \sum_{i,j} a_{ij}(S)\, E_{ij}$.

כיוון שסכום וכפל בסקלר רציפים ב- $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ נקבל ש- $a_{ij}(T_k) \to a_{ij}(T)$

$\Leftarrow T_k \to T$. בכיוון שני, אם $T_k \to T$, נשתמש ב- $a_{ij}(S) = \langle u_i, S v_j \rangle$

$$|a_{ij}(T) - a_{ij}(T_k)| = |\langle u_i, (T-T_k)v_j \rangle| \le \|u_i\| \|T-T_k\| \|v_j\| = \|T-T_k\| \to 0 \quad \square$$

אי-שוויון קושי-שוורץ + הגדרת הנורמה

תרגיל: הוכיחו את הטענה עבור בסיסים כלשהם.

הגדרה (דיפרנציאביליות): תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ו- $a \in A$ נקודה פנימית של A (כלומר יש כדור $a \in B_\varepsilon(a) \subseteq A$). תהי $f : A \to \mathbb{R}^m$ פונקציה.

הפונקציה f תיקרא **גזירה** (דיפרנציאבילית) בנקודה a אם קיימת העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך ש-

$$(*) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + T(h)}{\|h\|} = 0$$

ניסוח אחר: אם ניתן לכתוב $f(a+h) = f(a) + T(h) + r(h)$

כאשר T לינארית ו- $r(h) = o(\|h\|)$, כלומר $\frac{r(h)}{\|h\|} \to 0$ כאשר $\|h\| \to 0$.

טענה: אם f גזירה ב-a אז העתקה T יחידה.

הוכחה: תהי T העתקה לינארית המקיימת את $(*)$, $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ ו- $0 < t \in \mathbb{R}$.

אז

$$\underset{h = tx}{0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tx) - f(a) - T(tx)}{t\|x\|}$$

$$= \lim_{t \to 0} \left(\frac{f(a+tx) - f(a)}{t\|x\|} - \frac{T(x)}{\|x\|} \right)$$

לא תלוי ב- t

$$\Leftarrow \qquad \frac{T(x)}{\|x\|} = \lim \frac{f(a+tx) - f(a)}{t\|x\|}$$

כלומר

$$(**) \qquad T(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tx) - f(a)}{t}$$

וכיוון שהשוויון האחרון מתקיים גם עבור $x=0$, T נקבעת ביחידות. $\square$

סימון: אם f גזירה ב-a נסמן את ההעתקה הלינארית הנ"ל ע"י

$$df_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

או ע"י

$$D_f(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

הערה: קיום הגבול (**) לכל $x \in \mathbb{R}^n$ ואפילו העובדה שהוא מגדיר העתקה לינארית עדיין לא מבטיח ש-f גזירה ב-a (כפי שניתן להוכיח בתרגול הבא).

תרגיל: (א) מצאו דוגמא לפונקציה רציפה f כך שהגבול (**) קיים לכל x אך אינו נותן פונקציה לינארית ב-x.

(ב) מצאו דוגמא לפונקציה f כך שהגבול (**) קיים לכל x לינארי ב-x אך f אינה רציפה ב-a.

הדרכה: הביטו בפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

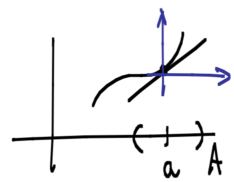
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (y-1)^2 + x^2 \leq 1 \quad \text{או} \quad y \leq 0 \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פ/ג מעלות

① אם $f: A\to\mathbb{R}^m$ היא קבועה אז בכל נקודה פנימית $a\in A\subseteq\mathbb{R}^n$ אז $df_a=0$.

② אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לינארית אז $f=df$.

③ $f:\underset{a\in}{A}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-a



$$f(a+h)=f(a)+\underset{\substack{\| \\ df_a}}{f'(a)}h+r(h)$$

④ תהי $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פנימית ונניח ש-f דיפרנציאבילית ב-a. אז $df_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

פונקציונל ולפי משפט ההצגה של ריס יש $v\in\mathbb{R}^n$ יחיד כך ש $df_a(x)=\langle x,v\rangle$.

v נקרא הגרדיאנט של f ב-a ומסומן $\operatorname{grad} f_a$ או ∇f_a.

נחשב אותו במפורש: יהי $(e_1,\dots,e_n)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$. אז

$$df_a(e_j)=\lim_{t\to0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=\frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_a$$

$$\|$$

$$\langle e_j,\operatorname{grad} f_a\rangle$$

$$\|$$

הרכיב של $\operatorname{grad} f_a$ בכיוון e_j

ולכן $\nabla f_a=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_a,\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_a\right)$.

טענה: תהיינה $g,h:A\to\mathbb{R}^m$ פונקציות מוגדרות בקבוצה פתוחה $A\subseteq\mathbb{R}^n$, ונניח שהן גזירות ב-a. אז כל צירוף לינארי שלהן גם כן גזיר, ומתקיים

$$d(\alpha f+\beta g)_a = \alpha\, df_a + \beta\, dg_a$$

הוכחה: מיידי מהתכונות בגבול עם סכום וכפל בסקלר. □

טענה: אם $f:\underset{\text{פתוחה}}{A}\to\mathbb{R}^n$, $a\in A$, ו-f גזירה ב-a אז f גם רציפה שם.

הוכחה: מ-(*) מקבלים

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-df_a(h)}{\|h\|}$$

$$\Rightarrow\quad 0=\lim_{x\to 0}\left(f(a+h)-f(a)-df_a(h)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(f(a+h)-f(a)\right)-\underbrace{\lim_{h\to 0} df_a(h)}_{=0}$$

רציפה df_a בגלל לינ.

□

המטריצה המייצגת של הדיפרנציאל ביחס לבסיס הסטנדרטי

עבור $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ נרשום כמקודם $f(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$

נניח ש- f דיפרנציאבילית בנקודה פנימית $a \in A$, ונחשב את $[df_a]_E^E$

ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}^m$.

$$df_a(e_j) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}$$

$$= \left(\lim_{t\to 0}\frac{f_1(a+te_j)-f_1(a)}{t},\dots,\lim_{t\to 0}\frac{f_m(a+te_j)-f_m(a)}{t}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}\Big|_a,\dots,\frac{\partial f_m}{\partial x_j}\Big|_a\right)$$

לכן

$$[df_a]_E^E = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_a\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_a & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_a \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_a & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\Big|_a \end{bmatrix}$$

בפרט אם f דיפרנציאבילית ב-a הנגזרות החלקיות קיימות ב-a.

טענה: יהיו $f:A\to\mathbb{R}^m$, $a\in A\subseteq\mathbb{R}^n$ פנימית, ונרשום $f=(f_1,\dots,f_m)$.

אז f דיפרנציאבילית ב-a אמ"ם $f_1,\dots,f_m$ דיפרנציאביליות ב-a (כפונקציות $A\to\mathbb{R}$).

הוכחה: תהי $T=(T_1,\dots,T_m)$ העתקה לינארית ונפרק גם אותה לרכיבים T_i.

אז
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-T(h)}{\|h\|}=0$$

אמ"ם
$$\lim_{h\to 0}\frac{f_i(a+h)-f(a)-T_i(h)}{\|h\|}=0 \qquad \forall\, 1\le i\le m\ .\ a$$

משפט: תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ונניח שכל הנגזרות החלקיות של f, כלומר $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $1\le i\le m$, $1\le j\le n$, קיימות ורציפות.

אז f דיפרנציאבילית בכל A.

הוכחה: לפי הטענה הקודמת מספיק להוכיח את המשפט עבור $m=1$.

נרשום
$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(a+h[i])-f(a+h[i+1])\right)$$

כאשר $h[i]=(0,\dots,0,h_i,h_{i+1},\dots,h_n)$, h_i רכיבי h.

כיוון שאנחנו מניחים שהנגזרות החלקיות קיימות ורציפות אפשר להפעיל את משפט ערך הביניים (הרב מימדי) על כל מחובר בסכום הנ"ל.

(צריך רק לבחור h קטן מספיק כך שכל הקטעים המעורבים יהיו בתוך A).

אז $f(a+h[i]) - f(a+h[i+1]) = h_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{b[i]}$, $b[i] \in [a+h[i+1], a+h[i]]$

מכאן

$$f(a+h) - f(a) - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_a \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{b[i]} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_a \right) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

(כאן בדיוק נכנסת הנחת הרציפות של הנגזרות החלקיות) □

הגדרה: פונקציה $f: A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, נקראת **גזירה ברציפות** אם היא גזירה ב- A וההעתקה

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ a &\longmapsto df_a \end{aligned}$$

היא רציפה (ביחס לנורמה שהגדרנו על מרחב ההעתקות)

נסמן את אוסף הפונקציות הללו ב- $C^1(A, \mathbb{R}^m)$.

מההגדרה המטריצונית $[df_a]_E^E = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, שקילות הנורמות במרחב המטריצות ולמרחב ההעתקות, ולמשפט האחרון נובע:

מסקנה: $f \in C^1(A,\mathbb{R}^m) \iff$ כל ה- $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ קיימות ורציפות ב- A.

טענה (כלל השרשרת): נניח ש- $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $a \in A$ פנימית, $f : A \to \mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית ב- a, $f(a) \in B$ פנימית, ו- $g : B \to \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ב- $f(a)$. אז $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית בנקודה a, ומתקיים

$$d(g\circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$$

הוכחה: נסמן

$$r_1(x) = f(a+x) - f(a) - df_a(x)$$

$$r_2(y) = g(f(a)+y) - g(f(a)) - dg_{f(a)}(y)$$

$$r_3(x) = (g\circ f)(a+x) - (g\circ f)(a) - (dg_{f(a)} \circ df_a)(x)$$

מהגדרת דיפרנציאביליות נובע $r_1(x) = o(\|x\|)$, $r_2(y) = o(\|y\|)$.

יש להוכיח ש- $r_3(x) = o(\|x\|)$.

לכן

$$(g\circ f)(a+x)-(g\circ f)(a)$$
$$= g(f(a+x)) - g(f(a))$$
$$= g\Big(\overbrace{f(a)+df_a(x)+r_1(x)}^{\shortparallel}\Big) - g(f(a))$$
$$= dg_{f(a)}\big(df_a(x)+r_1(x)\big) + r_2\big(df_a(x)+r_1(x)\big)$$

נסמן

$$r_3(x) = \underbrace{dg_{f(a)}\big(\underbrace{r_1(x)}_{o(\|x\|)}\big)}_{o(\|x\|)} + \underbrace{r_2\big(\underbrace{df_a(x)+r_1(x)}_{O(\|x\|)}\big)}_{o(\|x\|)}$$

לכן $r_3(x) = o(\|x\|)$ כנדרש. $\square$

כלל השרשרת במונחים של הנגזרות החלקיות.

כדי לחשב את מטריצת הנגזרות החלקיות של $g\circ f$ ב-a

נשתמש בזיהוי $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\to M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $T\mapsto [T]_E^E$

$$\left[d(f\circ g)_a\right]_E^E = \left[dg_{f(a)}\right]_E^E\cdot\left[df_a\right]_E^E = \left(\frac{\partial g_\ell}{\partial f_i}\right)_{f(a)}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_a$$

$$\frac{\partial (f\circ g)_\ell}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial g_k}{\partial f_i}\Big|_{f(a)}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|_a \qquad \begin{matrix}1\le \ell\le k\\ 1\le j\le n\end{matrix}$$