נגזרות מסדר גבוה

נניח ש- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו- $f: A \to \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות.

מקבלים פונקציה רציפה שסימנה df:

$$df : A \longrightarrow Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$
$$a \longmapsto df_a$$

תחת הזיהוי $Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{mn}$ אפשר לבדוק האם $df : A \to \mathbb{R}^{mn}$ גזירה ב- $a \in A$

במידה וכן זו תהיה הנגזרת השנייה של f ב- a: $d^2f_a := d(df)_a$.

במקרה כזה $d^2f_a \in Hom(\mathbb{R}^n, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, וכן הלאה ... d^kf_a.

הגדרה: תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ו- $f: A \to \mathbb{R}^m$. אומרים ש- f ממחלקה C^k אם יש לה נגזרת k-ית רציפה ב- A.

(זה שקול ל- $\frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$ קיימות ורציפות לכל $1 \le j \le m$, $1 \le i_1, \dots, i_k \le n$)

אם $f \in C^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$ אומרים ש- f חלקה ומסמנים $f \in C^\infty$.

תזכורת: אם $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה הנגזרות המעורבות

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ו- $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ קיימות ורציפות אז הן שוות. (נסמן בקיצור $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$)

אם $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ גזירה k פעמים ב-$\mathcal{U}$ פתוחה, נקבל

$$df_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$d^2 f_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$d^3 f_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

$$\vdots$$

וכן הלאה.

נוח לחשוב על הנגזרות הגבוהות כתבניות מולטילינאריות (=לינאריות בכל רכיב)

$$\mathrm{Mul}^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}))$$

(במקרה זה הן נקראות בילינאריות)

$$\varphi_T(v_1, v_2) = T(v_1)(v_2) \longleftarrow\!\shortmid \; T$$

באופן כללי: $\forall a \in \mathcal{U}, \quad d^k f_a \in \mathrm{Mul}^k(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k \text{ פעמים}}, \mathbb{R})$

תרגיל: הראו שאם $f \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה, אז

$\forall a \in \mathbb{R}^n, \quad d^k f_a \in \mathrm{Sym}^k(\underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k}, \mathbb{R})$ = תבניות מולטילינאריות סימטריות

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = \varphi(v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$$

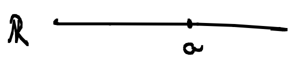
[הדטרמיננט הוא תבנית מולטילינארית אנטי-סימטרית]

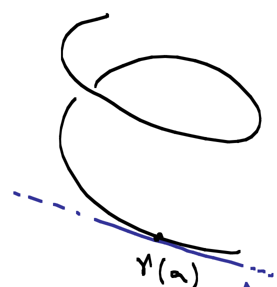
כמה מילים על מסילות והגרדיאנט.

נדון כעת בשני מקרי קיצון של העתקות $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{2} \mathbb{R}$ | $\mathbb{R} \xrightarrow{1} \mathbb{R}^n$.

① מסילה ב-$\mathbb{R}^n$ זו העתקה גזירה $\gamma: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה.

נניח ש-γ גזירה ברציפות $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$





$d\gamma_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$d\gamma_a(\mathbb{R})$ = ישר ב-$\mathbb{R}^n$

משוואת המשיק

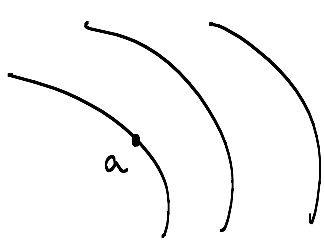
$y = d\gamma_a(x-a) + \gamma(a)$

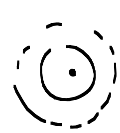
$$d\gamma_a(h) = h \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1'(a) \\ \vdots \\ \gamma_n'(a) \end{pmatrix} \quad , \quad h \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

② אם $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית נביט בקבוצות הרמה ("קווי הגובה") של f:

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid f(x_1, \dots, x_n) = u\} = f^{-1}\{u\}$$

למשל אם $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ נקבל ספירות ברדיוס $\sqrt{u}$





ניזכר שהגרדיאנט של f ב-a הוא הוקטור ב-$\mathbb{R}^n$ שמקיים

$$df_a(h) = \langle h, \nabla f_a \rangle \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

ראשית, נשים לב שהגרדיאנט של f נותן את הכיוון בו f משתנה באופן מקסימלי.

$$f(a+h) = f(a) + \underbrace{\langle h, \nabla f_a \rangle}_{\substack{\text{מקבל מקסימום (בערך מוחלט)} \\ h = \nabla f_a \text{ כאשר}}} + \underbrace{r(h)}_{\text{זניח}}$$

שנית, ∇f_a מאונך ליריעות (קווי) הגובה כי אם γ מסילה גזירה

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

! $\gamma(\mathbb{R}) \subseteq f^{-1}(\{u\})$ אז לפי כלל השרשרת

$$f(\gamma(t))'\Big|_{t=t_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t_0)} \frac{\partial \gamma}{\partial t}\Big|_{t_0} = \langle \gamma'(t_0), \nabla f_{\gamma(t_0)} \rangle$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big|_{\gamma(t_0)}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big|_{\gamma(t_0)} \right) \begin{pmatrix} \gamma_1'(t_0) \\ \vdots \\ \gamma_n'(t_0) \end{pmatrix}$$

נגזרת רגילה של פונ' מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$

$\|$

0

אם תמונת γ נמצאת ביריעה כמו

משפט ערך הביניים

משפט: יהיו $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, דיפרנציאבילית.
אז לכל $a,b\in\mathcal{U}$ כך שֶ- $[a,b]\subseteq\mathcal{U}$ קיים $c\in(a,b)$

קטע פתוח   קטע סגור

כך ש: $f(b)-f(a)=df_c(b-a)$.

הוכחה: ניקח $\varphi:[0,1]\longrightarrow[a,b]$, $\varphi(t)=(1-t)a+tb$ ונפעיל את
משפט ערך הביניים החד מימדי על $f\circ\varphi$

$$\exists\, t_0\in(0,1),\qquad f(\varphi(1))-f(\varphi(0))=f(\varphi(t))'\Big|_{t_0}(1-0)$$

$$f(b)-f(a)=\langle\nabla f_c,\varphi'(t_0)\rangle$$

$$=\langle\nabla f_c,b-a\rangle=df_c(b-a)$$

$\square$

מסקנה: בתנאים אלו $|f(b)-f(a)|\le\sup\limits_{c\in(a,b)}\|df_c\|\,\|b-a\|$

למשפט אין הכללה פשוטה לפונקציות ל-$\mathbb{R}^m$, אבל למסקנה כן.

מסקנה: אם $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^m$, $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$, f דיפרנציאבילית, $[a,b]\subseteq\mathcal{U}$
אז $\|f(b)-f(a)\|\le\sup\limits_{c\in(a,b)}\|df_c\|\,\|b-a\|$.

הוכחה: לכל $y\in\mathbb{R}^m$ נג' ב $g=g(y)\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\langle\cdot,y\rangle} \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \langle f(x), y\rangle$$

לפי המסקנה

$$|g(b)-g(a)| \le \sup_{c\in(a,b)} \|dg_c\|\,\|b-a\|$$

$$\|$$

$$|\langle f(b)-f(a), y\rangle| \le \sup_{c\in(a,b)} \sup_{\|x\|=1} |\langle df_c(x), y\rangle|\,\|b-a\|$$

$$\le \sup_{c\in(a,b)} \sup_{\|x\|=1} \|df_c(x)\|\,\|y\|\,\|b-a\|$$

$$= \sup_{c\in(a,b)} \|df_c\|\,\|b-a\|\,\|y\|$$

עד כאן y היה קבוע, כעת ניקח סופרמום על הוקטורים $\|y\|=1$.

צד ימין קבוע ולא תלוי ב-y ונקבל

$$\|f(b)-f(a)\| \le \sup_{c\in(a,b)} \|df_c\|\,\|b-a\| \qquad \square$$

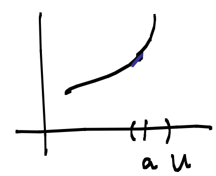
משפט הפונקציה ההפוכה

כעת נוכיח את המשפט החשוב בקורס.

בהינתן $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U,\mathbb{R}^m)$ נביט במשוואה $y=f(x)$.

מתי ניתן להפוך אותה (מקומית)?

ניזכר מה קורה עבור $n=m=1$.



(1) גזירה $f'(a) \neq 0$.

(2) מצמצמים לסביבה בה $f'(x) \neq 0$ (קיימת מרציפות הנגזרת).

(3) f מונוטונית בסביבה זו ולכן הפיכה.

במקרה הרב-מימדי נצטרך לעבוד הרבה יותר קשה ולהחליף את המונוטוניות במשהו אחר. ראשית, נשים לב שאפשר להניח ש- $m=n$:

טענה: יהיו $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של a, $b \in V \subseteq \mathbb{R}^m$ סביבה של b.

ונניח $f: U \to V$ חח״ע, $f(a)=b$, f גזירה ב-a ו-f^{-1} גזירה ב-b.

אז $m=n$.

הוכחה: נסמן $g=f^{-1}$, אז $f \circ g|_V = id_V$, $g \circ f = id_U$ ולכן, מכלל השרשרת

$dg_b \circ df_a = Id_{\mathbb{R}^m}$, $df_a \circ dg_b = id_{\mathbb{R}^n}$, בפרט אלו איזומורפיזמים ולכן $m=n$. $\square$

משפט (הפונקציה ההפוכה)

תהי $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ סביבה של a, $f \in C^1(U_0, \mathbb{R}^n)$ כך ש- df_a הפיך. אזי

(1) קיימת סביבה $U \subseteq U_0$ של a כך ש- $V = f(U)$ סביבה של $b = f(a)$ והצמצום $f|_U : U \to V$ חח"ע ועל.

(2) ההעתקה ההפוכה $g = f|_U^{-1} : V \to U$ גזירה ברציפות! $dg_b \circ df_a = Id$.

יתר על כן $dg_y \cdot df_x = Id$ לכל $x \in U$ ו- $y = f(x)$.

הערה (נחיצות התנאים):

(1) C^1 נחוץ, לדוגמא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

f גזירה, $f'(0) \neq 0$ אבל אין סביבה של 0 שבה f חח"ע

$$\left(\liminf_{t \to 0^+} f'(t) < 0 < \limsup_{t \to 0^+} f'(t) \right)$$

(2) מקומיות נחוצה, למשל

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$$

אז כל תנאי המשפט מתקיימים אבל לכל נקודה יש $\mathbb{Z}$ מקורות.

לפני שנוכיח את המשפט נפתח בסדרת רדוקציות

טענה 1: מספיק להוכיח את המשפט עבור $a=b=0$ ו- $df_0 = I_n$.

הוכחה: בהינתן $f: U_0 \to \mathbb{R}^n$, $U_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ ו-a, נסמן $A=df_a$, נגדיר את φ כך שמתקיים $f(a+x) = A\varphi(x) + b$ כלומר $\varphi(x) = A^{-1}f(a+x) - A^{-1}b$ עבור $x \in U_0 - a$ (הזזה של U_0 בוקטור a).

אז $\varphi \in C^1(U_0 - a, \mathbb{R}^n)$ $\varphi(0)=0$ ו- $d\varphi_0 = A^{-1}\circ df_a = I_n$.

ולכן אם המשפט נכון ל- φ הוא נכון גם ל- f: $f^{-1}(b+y) = a+\varphi^{-1}(A^{-1}y)$. □

(סכמטית

)

טענה 2: מספיק להוכיח את הטענה בהנחה ש- $\|df_x - I_n\| \le \frac{1}{2}$ לכל $x \in U_0$.

הוכחה: $f \in C^1(U', \mathbb{R}^n)$ פירושו $df \in C(U', Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n))$! $df_x \to df_0 = I_n$

כאשר $x \to 0$ ולכן יש סביבה של 0 בה $\|df_x - I_n\| \le \frac{1}{2}$. □

טענה 3: לכל $x \in \mathcal{U}$ מתקיים ש- df_x הפיך ו- $\| df_x^{-1} \| \leq 2$.

הוכחה: לכל $h \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$\| df_x(h) - h \| = \|(df_x - I)(h)\| \leq \|df_x - I_n\| \|h\| \leq \frac{1}{2} \|h\|$$

לכן מאי-שוויון המשולש נובע $\quad \| df_x(h) \| \geq \frac{1}{2} \|h\| \quad (*)$

מכאן נובע ש- df_x הפיכה (כי אילו היה $0 \neq h_0 \in \mathbb{R}^n$ בגרעין שלה היינו מקבלים סתירה ל-(*)).

יתר על כן, כיוון שהיא הפיכה מקבלים, ע"י הצבה $h := df_x^{-1}(v)$

(לכל v מתקבל ע"י h מתאים) $\quad \|v\| \geq \frac{1}{2} \|df_x^{-1}(v)\|, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$

ומכאן $\quad \| df_x^{-1} \| \leq 2 \quad \square$

עד כאן תיקנו את הוכחת המקרה $m=n=1$.

(וקיבלנו גם חסמים על הנורמות של $df_x - I$ ו- df_x^{-1}).

תרגילים נוספים

תרגיל: נניח ש- $f,g : U \to \mathbb{R}^m$ גזירות ו- $\varphi : U \to \mathbb{R}$ מוגדרת

ע"י $\varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$. אז φ גזירה ו-

$$d\varphi_x(h) = \langle df_x(h), g(x) \rangle + \langle f(x), dg_x(h) \rangle$$

תרגיל: הוכיחו ש- $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$, העתקה חלקה.