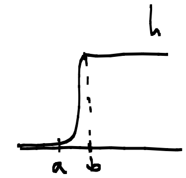
פיצול יחידה

דיון מקדים: נניח $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה $K \subset$ קומפקטית. הפונקציה המציינת של K אינה רציפה. ננסה למצוא "קירוב" שלה ע"י פונקציה חלקה, כלומר $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ חלקה כך ש- $\varphi|_K \equiv 1$, $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus U} \equiv 0$, $0 \le \varphi \le 1$:

נתחיל ממקרה פשוט: נמצא פונקציה $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ חלקה עם

$$(*) \qquad h(x) = 0 \quad x \le a, \qquad h(x) = 1 \quad x \ge b$$



נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

קל לראות ש- f חלקה! $f^{(j)}(0) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

כעת, לפונקציה

$$g_{a,b}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{(x-b)^2}} & x \in (a,b) \\ 0 & x \notin (a,b) \end{cases}$$

מתקיים: $g(x)>0$ $\forall x\in(a,b)$ ו- $g\equiv 0$ אחרת.

נגדיר

$$h_{a,b}(x)=\begin{cases}1 & x\geq b\\ \int_a^x g_{a,b}\Big/\int_a^b g_{a,b} & a\leq x\leq b\\ 0 & x\leq a\end{cases}$$

אז $h_{a,b}$ חלקה ומקיימת $(*)$.

כעת, נפתור את הבעיה המקורית - K קטע סגור $\subseteq$ U קטע פתוח $\subseteq$ $\mathbb{R}$

כי אם $\underbrace{(a-\varepsilon_1,b+\varepsilon_2)}_{U} \supseteq \underbrace{[a,b]}_{K}$ אז

$$\varphi(x)=h_{a-\varepsilon_1,a}(x)\cdot\left(1-h_{b,b+\varepsilon_2}(x)\right)$$

עושה את העבודה.

תרגיל: הכלילו את φ למקרה K תיבה סגורה $\subseteq$ תיבה פתוחה $\subseteq$ $\mathbb{R}^n$.

תרגיל: הוכיחו שהפונקציה

$$\theta_{a,r}(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{r^2-\|x-a\|^2}} & x\in B_r(a)\\ 0 & x\notin B_r(a)\end{cases}$$

חלקה ומקיימת $\theta_{a,r}(x)>0$ ב- $x\in B_r(a)$ ו- $\theta_{a,r}\equiv 0$ אחרת.

טענה: יהיו K קומפקטית $\subseteq \mathcal{U}$ פתוחה $\subseteq \mathbb{R}^n$. אז יש פונקציה חלקה $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$
המקיימת $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi|_K \equiv 1$, $supp(\varphi) \subseteq \mathcal{U}$ (בפרט $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}} \equiv 0$).

הוכחה: ראשית נמצא פונקציה $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, אי שלילית בכל $\mathbb{R}^n$, חיובית על K,
וכך ש- $supp(g) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \neq 0\}} \subseteq \mathcal{U}$ = התומך של g

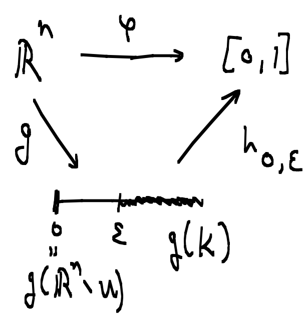
ואכן, יהי $0 < \delta = d(\underbrace{K}_{\text{קומפקטית}}, \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{U}}_{\text{סגורה}})$. תהיינה $a_1, \dots, a_m$ נקודות ב- K כך

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\delta/2}(a_i)$$

(יש מספר סופי כאלה מקומפקטיות).

אז $g(x) = \sum_{i=1}^{m} \theta_{a_i, \delta/2}(x)$ מקיימת את הדרוש ($\theta_{a,r}$ מהתרגיל למעלה).

כעת g רציפה על K וחיובית ולכן מקבלת מינימום, נאמר $\varepsilon > 0$.



לכן $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $\varphi = h_{0,\varepsilon} \circ g$ וסיימנו $\square$

הגדרה:

① אוסף תתי-קבוצות $\{X_\alpha\}$ של קבוצה A נקרא <u>סופי מקומית</u> אם לכל $a\in A$ יש קבוצה פתוחה $\mathcal{U}$ כך ש- $a\in\mathcal{U}$ ו- $X_\alpha\cap\mathcal{U}=\phi$ פרט למספר סופי של X_α-ים.

② יהי $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. התומך של f הינו הקבוצה

$$\mathrm{supp}(f)=\overline{\{x\in\mathcal{U}\mid f(x)\neq 0\}}$$

הגדרה (חלוקת יחידה)

יהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תת-קבוצה ויהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של A. חלוקת יחידה של A הכפופה ל- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ הינו אוסף $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של פונקציות חלקות על $\mathbb{R}^n$ עם התכונות הבאות:

(1) לכל $\alpha\in I$, $0\leq\varphi_\alpha(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^n$.

(2) $\mathrm{supp}(\varphi_\alpha)\subseteq\mathcal{U}_\alpha$ $\forall\alpha\in I$.

(3) האוסף $\{\mathrm{supp}(\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ הינו סופי מקומית ומתקיים

$$\forall x\in A \qquad \sum_{\alpha\in I}\varphi_\alpha(x)=1$$

משפט

יהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תת-קבוצה ו- $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח שלה. אז יש חלוקת יחידה של A הכפופה ל- $\{\mathcal{U}_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

הוכחה

מקרה (1): A קומפקטית.

מקומפקטיות, מספר סופי של איברי הכיסוי מכסים את A, נאמר $U_1,\dots,U_m$.

מספיק למצוא פיצול יחידה הכפוף ל- $U_1,\dots,U_m$.

תחילה נמצא, באינדוקציה, קומפקטיות $D_i \subseteq U_i$ שהפנים שלהן מכסה את A.

נניח ש- $D_1,\dots,D_k$ נבחרו כך ש: $\{int(D_1),\dots,int(D_k),U_{k+1},\dots,U_m\}$ כיסוי של A

(k יכול להיות גם 0 וזהו מקרה הבסיס לאינדוקציה). נגדיר

$$C_{k+1} := A \setminus \left(int(D_1) \cup \dots \cup int(D_k) \cup U_{k+2} \cup \dots \cup U_m \right)$$

אז $C_{k+1} \subseteq U_{k+1}$ והיא קומפקטית (כי היא סגורה בתוך קומפקטית).

מתרגיל בית 1 (שאלה 7) יש קבוצה קומפקטית $D_{k+1} \subset U_{k+1}$ כך ש- $C_{k+1} \subseteq int(D_{k+1})$.

לאחר שבנינו את $D_1,\dots,D_m$, לכל D_i תהי $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ פונקציה חלקה המקיימת

$\varphi_i|_{D_i} \equiv 1$, $0 \le \varphi_i \le 1$, $supp(\varphi_i) \subseteq U_i$ כמובטח מהטענה הקודמת.

כיוון ש- $\{D_1,\dots,D_m\}$ כיסוי של A, מתקיים $\varphi_1(x)+\dots+\varphi_m(x) > 0$ על U פתוחה $A \subseteq U$

ב- U אפשר להגדיר

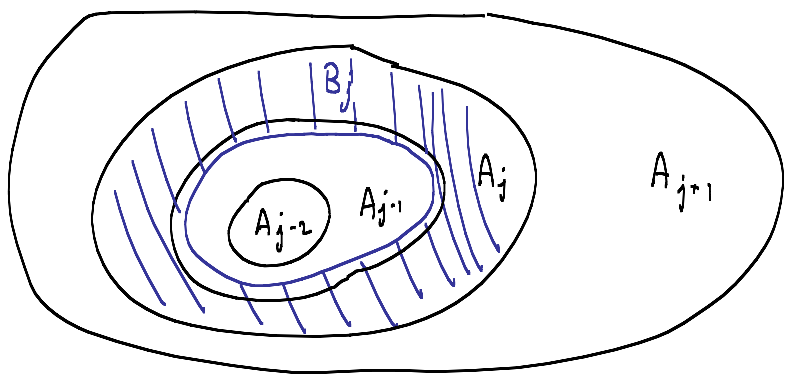
$$\phi_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_1(x)+\dots+\varphi_m(x)}, \quad i=1,\dots,m$$

וזהו פיצול יחידה הכפוף ל- $\{U_1,\dots,U_m\}$.

מקרה (2): $A=\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ עם $A_j \subseteq int(A_{j+1})$ קומפקטיות.

לכל j נסמן ב- Ω_j את $\{ U_\alpha \cap (int(A_{j+1}) \setminus A_{j-2}) \mid \alpha \in I \}$.

אז Ω_j היא כיסוי פתוח של הקבוצות הקומפקטיות $B_j := A_j \setminus int(A_{j-1})$.



לפי מקרה (1), יש פירוק יחידה Φ_j ל- B_j הכפוף ל- Ω_j.

לכל $x \in A$ הסכום

$$\sigma(x) = \sum_{\varphi \in \bigcup_j \Phi_j} \varphi(x)$$

סופי (כי אם $x \in A_j$ אז $0=\varphi(x)$ לכל $\varphi \in \Phi_k$ עם $k \geq j+2$).

לכל j, ולכל $\varphi \in \Phi_j$ נגדיר $\tilde{\varphi}(x) = \frac{\varphi(x)}{\sigma(x)}$ ואז ה- $\tilde{\varphi}$ מהווה פירוק יחידה ל- A כפוף לעידון של $\{U_\alpha\}$ ולכן כפוף ל- $\{U_\alpha\}$.

מקרה (3): A פתוחה. נגדיר

$$A_j := \left\{ x \in A \;\middle|\; \|x\| \le j \ \wedge \ d(x, \partial A) \ge \frac{1}{j} \right\}$$

אז A_j קומפקטים, $A = \bigcup A_j$ ו- $A_j \subseteq int(A_{j+1})$ ונעזר את מקרה (2).

מקרה (4): A כללית. תהא $A \subseteq B = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$. אז לפי מקרה (3) יש פיצול יחידה ל- B כפוף ל- $\{U_\alpha\}$ ולכן גם פיצול יחידה ל- A. ∎

הערה 1: נניח ש- $\{\psi_\alpha\}$ פיצול יחידה של A הכפוף ל- $\{U_\alpha\}$ ותהא $K \subseteq A$ קומפקטית. אז לכל נקודה ב- K יש סביבה כך שרק מספר סופי של תומכים $supp(\psi_\alpha)$ חותכים אותה. לפי זה טריוויאלית ולכן מקומפקטיות $\phi = K \cap supp(\psi_\alpha)$ פרט למספר סופי של $\alpha \in I$.

הערה 2: לעתים נוח לעבוד עם פיצול יחידה שהתומך של כל פונקציה בו קומפקטי. מהוכחת המשפט נובע שתמיד אפשר לעדן את הכיסוי הנתון ולקבל פיצול הכפוף לעידון עם תכונה זו.

הערה 3: מהבניה במשפט רואים שתמיד אפשר לסדר את אברי Φ כסדרה (אם העוצמה של הכיסוי גדולה מ- $\aleph_0$ אז $\psi_\alpha = 0$ פרט לקבוצה בת-מנייה (שאותה ניתן לסדר).

אינטגרציה בעזרת פירוק יחידה (אדמיסבילי)

כיסוי פתוח $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ של $A\subseteq\mathbb{R}^n$ נקרא אדמיסבילי אם $\bigcup_\alpha U_\alpha = A$.

נניח ש- $\Phi=\{\varphi_\alpha\}$ פירוק יחידה הכפוף לכיסוי $\{\mathcal{U}_\alpha\}$ אדמיסבילי, ונניח שהתומכים קומפקטיים.

תהא $f:A\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית מקומית (כלומר לכל $x\in A$ יש סביבה V כך ש- f אינטגרבילית על V), ונניח שנקודות אי הרציפות של f הן ממידה אפס. בתנאים אלו $\int_A \varphi_\alpha|f|$ קיים. נאמר ש- f אינטגרבילית על A בעזרת Φ אם

$$\sum_\alpha \int_A \varphi_\alpha|f|$$

מתכנס.

מכאן נובע ש- $\sum_\alpha \left|\int_A \varphi_\alpha f\right|$ מתכנס, ולכן $\sum_\alpha \int_A \varphi_\alpha f$ מתכנס בהחלט.

נגדיר:

$$\underbrace{\int_{A,\Phi} f}_{\text{"האינטגרל של f על A בעזרת פירוק }\Phi\text{"}} := \sum_\alpha \int_A \varphi_\alpha f$$

משפט

① האינטגרל $\int_{A,\Phi} f$ לא תלוי בכיסוי $\{U_\alpha\}$ או בפירוק $\{\varphi_\alpha\}$. כלומר, אם $\{\psi_\beta\}$ פירוק יחידה ביחס לכיסוי אדמיסבילי $\{V_\beta\}$. אז $\sum_\beta \int_A \psi_\beta \cdot |f|$ מתכנס גם כן ומתקיים

$$\sum_{\alpha\in I}\int_A \varphi_\alpha f = \sum_{\beta\in J}\int_A \psi_\beta f$$

② אם A ו- f חסומות אז f אינטגרבילית ביחס לפירוק יחידה אדמיסבילי.

③ אם A מכילה בתוכן ו- f חסומה אז $\sum_\alpha \int_A \varphi_\alpha f = \int_A f$.

הוכחה

① כיוון ש $\varphi_\alpha \cdot f = 0$ על משלים של קבוצה קומפקטית K, ויש רק מספר סופי של ψ_β שלא מתאפסות על K, אפשר לרשום

$$(*) \quad \sum_{\alpha\in I}\int_A \varphi_\alpha \cdot f = \sum_{\alpha\in I}\int_A \sum_{\beta\in J}\psi_\beta\cdot\varphi_\alpha\cdot f = \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in J}\int_A \psi_\beta\cdot\varphi_\alpha\cdot f$$

אם נציב ב-(*) $|f|$ במקום f נקבל ש-

$$\sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in J}\int_A \psi_\beta\cdot\varphi_\alpha\cdot|f| < \infty$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{\alpha\in I}\sum_{\beta\in J}\left|\int_A \psi_\beta\cdot\varphi_\alpha\cdot f\right| < \infty$$

התכנסות זו מאפשרת לשנות סדר סכימה $\beta \leftrightarrow \alpha$. מכאן $\sum_\beta \int_A \psi_\beta |f|$ מתכנס

ומתקיים שוויון

$$\sum_\alpha \int_A \varphi_\alpha f = \sum_\beta \int_A \psi_\beta f$$

② תהא B תיבה המכילה את A, M חסם עליון ל- f ב A ו- $F\subseteq I$ סופית. אז

$$\sum_{\alpha\in F}\int_A \varphi_\alpha\cdot|f| \le \sum_{\alpha\in F} M\int_A \varphi_\alpha = M\int_A \sum_{\alpha\in F}\varphi_\alpha \le M\cdot v(B)$$

$\sum_{\alpha\in F}\varphi_\alpha \le 1$ ב A

(מהערה ③ ניתן לסדר את $\{\varphi_\alpha\}$ בסדרה לתמנן במשלת. למשל, את הסכומים החלקיים)

תרגיל: תהא A מדידה ז'ורדן ויהי $\varepsilon>0$. הוכיחו שקיימת קבוצה קומפקטית מדידה ז'ורדן $K\subset A$ כך ש- $\int_{A\setminus K} 1 < \varepsilon$

③ יהי $\varepsilon>0$, ותהא $K\subseteq A$ קומפקטית ומדידה ז'ורדן כך ש- $\int_{A\setminus K} 1 < \varepsilon$.
יש רק מספר סופי של $\alpha\in I$ כך ש- φ_α לא מתאפסת על K.

תהי $F \subseteq I$ תת קבוצה סופית הכוללת אותן. אז

$$\left| \int_A f - \sum_{\alpha \in F} \int_A \varphi_\alpha f \right| \leq \int_A \left| f - \sum_{\alpha \in F} \varphi_\alpha \cdot f \right|$$

$$\leq M \int_A \left(1 - \sum_\alpha \varphi_\alpha \right)$$

$$= M \int_A \sum_{\alpha \in I \setminus F} \varphi_\alpha \leq M \int_{A \setminus K} 1 \leq M\varepsilon$$

$\square$